www.simiode.org
SIMIODE
A SYSTEMIC INITIATIVE FOR MODELING INVESTIGATIONS
& OPPORTUNITIES WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

VERSIÓN DEL ESTUDIANTE
ENFRÍALO

Brian Winkel, Director de SIMIODE
Chardon OH 44024 USA
BrianWinkel@simiode.org

Traducido por Migdonio González
Universidad Tecnológica de Panamá
Ciudad de Panamá, Panamá

Resumen: Ofrecemos datos sobre la temperatura del agua en un vaso de precipitado que reposa en una habitación de temperatura constante y también en un entorno de temperatura no constante. Se alienta a los estudiantes a considerar enfoques de modelado empírico y analítico. Ofrecemos conjuntos de datos adicionales en hojas de cálculo de Excel para seguir trabajando.

ENUNCIADO

Te ofrecemos la oportunidad de construir modelos matemáticos que describen la temperatura del agua caliente en un vaso de precipitado a medida que se enfría primero en un ambiente de temperatura constante y luego en un ambiente de temperatura no constante. Usando modelos empíricos y analíticos, compararás tus resultados y decidirás cuál es el mejor modelo según los criterios que selecciones.

Recopilación de datos y conjunto de datos

La Figura 1 muestra una configuración para medir la temperatura cambiante del agua contenida en un vaso de precipitado ubicado en un entorno de temperatura constante, mientras la Figura 2 muestra la salida de la pantalla para una corrida de recolección de datos típica utilizando el software LoggerPro de Vernier y una sonda térmica de acero inoxidable.

La Tabla 1 presenta la temperatura del agua en el vaso de precipitado a intervalos de tiempos iguales (muestreados a partir de un conjunto de datos más grande que se encuentra en 1-031-

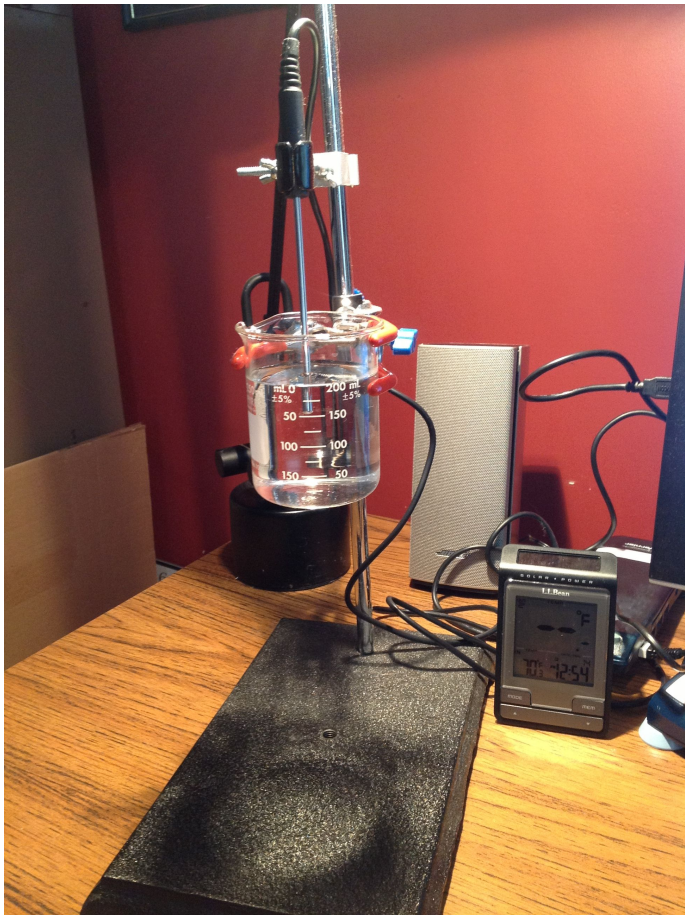

Figura 1. Se muestra el aparato utilizado para recopilar datos sobre el enfriamiento del agua en un vaso de precipitado. El vaso de precipitado, que contiene 200 ml de agua del grifo y la sonda térmica de acero inoxidable Vernier, se mantienen en su lugar por medio de un soporte. Un termómetro ambiental se encuentra en la esquina inferior derecha para corroborar la temperatura ambiente.

CoolItData.xls) tal como lo recopiló la sonda. Se ofrecen más datos de esta y otras corridas en el archivo de Excel 1-031-CoolItData.xls.

Tiempo (min)	Temp °F	Time (min)	Temp °F
0	104.69	50	82.78
5	100.41	55	81.69
10	97.53	60	80.69
15	94.83	65	79.73
20	92.38	70	78.89
25	90.41	75	78.06
30	88.37	80	77.31
35	86.81	85	76.72
40	85.34	90	76.10
45	84.00		

Tabla 1. Muestra de datos de la temperatura del agua (200 ml) en un vaso de precipitado donde la temperatura ambiental es constante 72,0 °F. El conjunto de datos completo se encuentra en el archivo de Excel 1-031-CoolItData.xls.

Oportunidades de modelado

Te pedimos que construyas un modelo matemático de la temperatura del agua en un vaso de precipitado (en grados Fahrenheit) en función del tiempo (en minutos), es decir, $T(t)$ es la temperatura del agua en el vaso de precipitado en grados Fahrenheit y t es el tiempo en minutos.

Hay varios enfoques que podemos adoptar para construir un modelo:

- *Empírico*, en el que intentamos ajustar los datos a alguna función matemática, tal vez con poca o ninguna compresión del fenómeno físico subyacente.
- *Analítico*, en el que intentamos ofrecer suposiciones sobre el proceso físico subyacente que conduciría a un modelo matemático.

El enfoque analítico es más deseable, ya que estamos tratando de usar nuestras habilidades de modelado para comprender mejor el fenómeno, así como para predecir matemáticamente el comportamiento del fenómeno mientras determinamos algunos parámetros físicos importantes que tienen significado. Sin embargo, el modelo empírico podría tener propósitos predictivos y la interpolación de valores no observados sería fácil a partir de este modelo.

Modelado empírico

Examinemos algunos posibles modelos empíricos (consulta la Tabla 2) y preguntemos por qué podríamos cuestionar o aceptar cada uno.

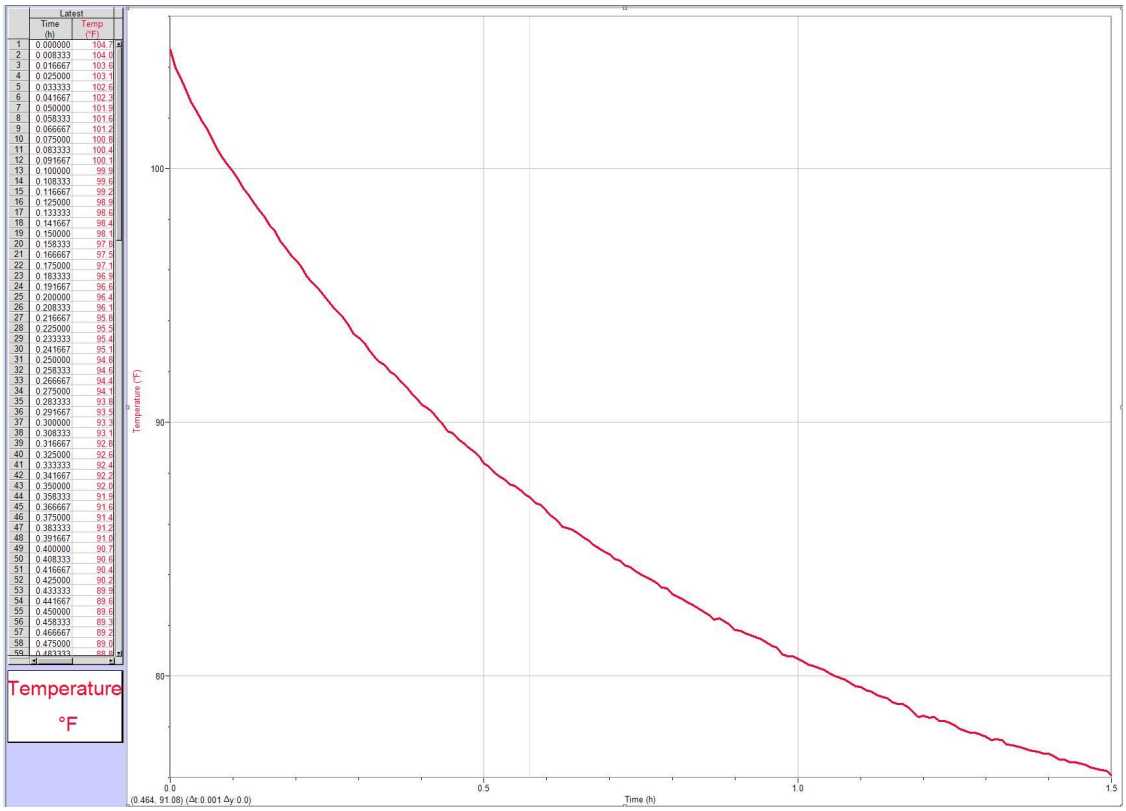

Figura 2. Salida de la pantalla de recopilación de datos de Vernier Software. A la izquierda están las observaciones de tiempo y temperatura con un gráfico a la derecha. En esta situación, la temperatura ambiente o ambiental es 70,3 °F y la temperatura del agua en el vaso de precipitado es inicialmente de 104,7 °F.

1. Para cada modelo matemático en la Tabla 2 para $T(t)$ la temperatura del agua en el vaso de precipitado en grados Fahrenheit en el momento t en minutos ofrece una crítica en cuanto a por qué la función puede ser apropiada o no. Discute tus razones para cada una de tus críticas con tus compañeros.

Modelo Matemático	Crítica
$T(t) = a + bt$	
$T(t) = a + bt + ct^2$	
$T(t) = a \arctan(bt + c)$	
$T(t) = ae^{bt}$	
$T(t) = ae^{bt} + c$	
$T(t) = a \cos(bt + c) + d$	

Tabla 2. Algunos modelos empíricos ofrecidos con críticas sobre por qué pueden o no ser un buen modelo para nuestro fenómeno.

De hecho, podríamos "forzar" un polinomio ajustado a cualquier conjunto de datos a "pasar" a través de cada uno de los puntos del conjunto de datos. Considera este hecho.

Dado el conjunto de $n+1$ observaciones $\mathcal{S} = \{(t_i, T_i)|$ no hay dos t_i's iguales, $i = 1, 2, 3, \ldots, n+1\}$ hay un único polinomio de grado n que pasa por cada punto de $\mathcal{S}$, es decir, podemos determinar de manera única números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tal que $S_n(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i = a_0 + a_1 t + \ldots a_n t^n$.

2. Explica por qué este hecho sobre "forzar polinomios"de grado suficientemente alto a través de cualquier conjunto de datos finitos puede no ser bueno para el modelado. Ver la segunda entrada en la Tabla 2, es decir, $T(t) = a + bt + ct^2$, y tus críticas colectivas.

Probando un modelo empírico contra datos observados

Uno necesita desarrollar criterios para probar cuán bueno es un modelo. Primero, uno tiene que estimar los parámetros de alguna manera y luego comprar el modelo resultante con los datos.

3. Una vez que obtengas un buen modelo empírico con el que te sientas cómodo, pregúntate cómo determinarás los parámetros y probarás el modelo con los datos. Discute esto y desarrolla algunos criterios para juzgar lo apropiado de tu modelo para estos datos.
4. Desarrolla tus criterios y aplícalos, determinando tu mejor elección de modelo empírico.

Modelado analítico

Un enfoque para el modelado analítico es tratar de comprender todos los mecanismos de pérdida de calor, conducción, convección y radiación, con gran detalle y construir un modelo, tal vez incluso un modelo estocástico. Para el pequeño nivel atómico, las acciones son a menudo estocásticas, pero en conjunto parecen ser deterministas. Esto es ciertamente demasiado profundo para considerarlo ahora. Sin embargo, podemos hacer algunas suposiciones sobre cómo está cambiando la temperatura.

5. Escribe algunas cosas que observas sobre la temperatura, $T(t)$, a medida que pasa el tiempo. Luego, traduce estas observaciones en afirmaciones matemáticas sobre la tasa de cambio de la temperatura, $T'(t)$, a medida que pasa el tiempo. Es a partir de esta última actividad que elaboraremos un modelo de ecuación diferencial razonada para $T'(t)$.
6. Considera los siguientes candidatos (consulta la Tabla 3) para un modelo de ecuación diferencial, es decir, un modelo analítico, para $T(t)$, la temperatura del agua en el vaso de precipitado en el momento t. Ofrece críticas sobre por qué cada uno puede o no ser un buen modelo para nuestro fenómeno.
7. Después de completar la actividad (6), debes tener un modelo de ecuación diferencial con algunos parámetros, parámetros que tengan unidades y significado. Asegúrate de determinar las unidades de los parámetros e intenta ofrecer significado o propósito a los parámetros de tu ecuación diferencial.
8. Finalmente, usando los datos en la Tabla 1 usa tus criterios desarrollados anteriormente para encontrar las mejores estimaciones de tus parámetros, determinar tu modelo final, comparar el modelo con los datos y ofrecer tus observaciones sobre el proceso y resultado.

Enfriamiento en un entorno cambiante

Hicimos varias sesiones para recopilar datos sobre agua enfriándose en nuestro entorno de oficina utilizando el aparato que se muestra en la Figura 1. La Tabla 1 fue una de nuestras primeras corridas. Una mañana nos levantamos temprano y comenzamos otra recolección de datos. Teníamos nuestro confiable termómetro para habitaciones pequeñas (mira el lado inferior derecho de la Figura 1) y cuando comenzamos a recopilar los datos, notamos que la temperatura de la habitación también

Modelo Matemático	Crítica
$T'(t) = a$	
$T'(t) = a + bt$	
$T'(t) = \frac{A}{B+Ct}$	
$T'(t) = k(T(t) - T_{\text{Env}})$	
$T'(t) = -kT(t)$	
$T'(t) = Ae^{-kt}$	

Tabla 3. Algunos modelos analíticos ofrecidos con críticas de por qué pueden o no ser un buen modelo para nuestro fenómeno.

estaba cambiando. Es una habitación pequeña, el recolector es una persona grande, el monitor es un gran dispositivo de funcionamiento en caliente, el cuarto se calentaba a medida que salía el sol. Así que no nos sorprende que el calor aumentara en la habitación.

En la Tabla 4 mostramos el tiempo, la temperatura del agua y la temperatura de la habitación o del entorno

9. Modela la temperatura del ambiente, $T_E(t)$, como una función del tiempo, t.

10. Construye un modelo completo para la tasa de cambio de la temperatura ($T(t)$) en términos de la temperatura en la habitación ($T_E(t)$), resuelve el modelo, estima los parámetros en el modelo, y valida tu modelo comparando tus predicciones con los datos.

Tiempo (min)	Temp Habitación °F	Temp Agua °F
0.0	_	103.1
5.0	58.3	99.
9.5	59.7	96.
15.0	61.	92.8
20.5	62.1	89.9
27.0	62.8	86.9
35.0	63.7	83.9
44.0	64.2	81.0
54.0	64.8	78.4
58.5	64.9	77.5
70.0	65.5	75.3
75.	65.7	74.6
80.0	65.8	73.8
88.5	66.	72.7
102.0	66.2	71.4
106.5	66.2	70.9
112.5	66.4	70.5
117.0	66.4	70.2
126.	66.6	69.7
130.5	66.7	69.4
139.5	66.7	69.0

Tabla 4. Muestra de datos de la temperatura del agua (200 ml) en un vaso de precipitado donde la temperatura ambiental está cambiando. El conjunto de datos completo se encuentra en el archivo de Excel 1-031-CoolItData.xls.