

VERSIÓN DEL ESTUDIANTE M&M - MUERTE E INMIGRACIÓN

Brian Winkel
Director de SIMIODE
Cornwall NY USA

Traducido por Migdonio González
Universidad Tecnológica de Panamá
Ciudad de Panamá, Panamá

ENUNCIADO

Considera una bolsa de caramelos M&M de tamaño normal, sin maní, sólo normal. Normalmente hay unas 55 piezas en cada bolsa. Son de diferentes colores, pero cada pieza casi siempre tiene una “m” impresa en un lado y no en el otro. Por lo tanto, hay distinciones entre los lados. Hagamos un experimento (un experimento de vida o muerte) con los M&M.

Modelo de la muerte

Cada uno de nosotros llevará a cabo esta simulación en la que los M&M viven o mueren. Después de abrir la bolsa de caramelos, pongan 50 de las 55 piezas en un pequeño contenedor; un vaso de papel servirá. Antes de comenzar el experimento, describe lo que crees que va a suceder y ofrece algunas suposiciones que apoyen tu descripción y otras que podrían no tener mucho que ver con lo que tu esperas que suceda. A menudo, las suposiciones chocan entre sí, así que desglosa las suposiciones hasta su forma más simple, es decir, no utilices palabras como “y”.

El Experimento: Sacude suavemente los M&M's sobre el escritorio (tal vez quieras usar un plato de papel para coger los M&M's y mantenerlos limpios también). Determinamos para cada M&M si vive o muere. Si la 'm' aparece en la parte superior este M&M muere, de lo contrario hay vida para este M&M. Al morir, debes retirar los M&M de la población (déjalos a un lado ya que

los necesitaremos para otro experimento), cuenta y anota el número de M&M que sobreviven en la Tabla 1, y ahora pon los M&M de vuelta en su contenedor para la siguiente iteración. Haz esto una y otra vez y anota los resultados.

- Establece tus suposiciones acerca de la actividad física.
- Ofrece una descripción de lo que debería suceder. ¿Te animas a hacer una predicción?
- En la Tabla 1 registra lo que pasó y compáralo con lo que pensaste que pasaría.

Modelando la Muerte de M&M's	
Iteración	# de M&M's al inicio de la iteración
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Tabla 1. Modelando la muerte de M&M's.

- Compara tu descripción/predicción con lo que realmente ocurrió.
- Indica cuáles de tus suposiciones fueron razonables y desempeñaron un papel en el experimento.

Intento de modelar matemáticamente

Intentemos construir un modelo matemático de esta situación. Supongamos que definimos el número de M&M's vivos al comienzo de la iteración n como $a(n)$. ¿Qué valores tomaría n ? ¿Qué sería $a(0)$ en este caso? ¿"Sabes" qué sería $a(1)$?

Basándote en las observaciones y en tus suposiciones, produce una fórmula razonable para $a(n)$, es decir, ofrece una función discreta $a(n)$, en la única variable, n , para $n = 0, 1, 2, \dots$

- Discute si tu modelo para $a(n)$ es razonable.
- ¿Cómo medirás tu "éxito" como modelador en esta situación? Comprueba con los demás alumnos de la clase y mira si estás bien encaminado con tu modelo.

- h) Adelante, comprueba lo bueno que es tu modelo en la predicción de tu experimento y defiende tu razonamiento.

Modelo de muerte con inmigración

Cada uno de nosotros llevará a cabo esta simulación en la que los M&M's viven o mueren, pero esta vez permitiremos que la inmigración recupere los daños causados a la población de M&M's por las muertes. De nuevo, pon 50 de las 55 y pico piezas en tu taza. Antes de comenzar el experimento, describe lo que crees que sucederá y ofrece algunas suposiciones que apoyen tu descripción y otras que podrían no tener mucho que ver con lo que esperas que suceda. A menudo, las suposiciones chocan entre sí, así que desglosa las suposiciones hasta su forma más simple, es decir, no uses palabras como “y”.

El Experimento: Sacude suavemente los M&M's sobre el escritorio. Tal vez quieras usar un plato de papel para coger los M&M's y mantenerlos limpios también. Luego determina para cada M&M si vive o muere. Recuerda, si la 'm' se muestra en la parte superior este M&M muere, de lo contrario hay vida para este M&M. Al morir, debes retirar los M&M de la población (déjalos a un lado ya que los necesitaremos para otro experimento).

MUY IMPORTANTE: Además de poner los M&M's que sobrevivieron de nuevo en la taza, agreguemos 10 inmigrantes EN CADA GENERACIÓN. Puedes usar los de tu “pila de muerte”. Haz esto una y otra vez y registra tus resultados.

- i) Establece tus suposiciones acerca de la actividad física.
- j) Ofrece una descripción de lo que debería suceder.
- k) En la Tabla 2 registra lo que pasó y compáralo con lo que pensaste que pasaría.
- l) Compara tu descripción/predicción con lo que realmente ocurrió.
- m) Indica cuáles de tus suposiciones fueron razonables y desempeñaron un papel en el experimento.

Intento de un modelo matemático

Intentemos construir un modelo matemático de esta situación. Supongamos que definimos el número de M&M's vivos al comienzo de la iteración n como $b(n)$. ¿Qué valores tomaría n ? ¿Qué sería $b(0)$ en este caso? ¿“Sabes” lo que sería $b(1)$?

Basándote en las observaciones y tus suposiciones, genera una fórmula razonable para $b(n)$, es decir, ofrece una función discreta $b(n)$, en la única variable, n , para $n = 0, 1, 2, \dots$

- n) Discute si tu modelo para la función $b(n)$ es razonable.
- o) ¿Cómo medirás tu “éxito” como modelador en esta situación? Comprueba con los demás alumnos de la clase y mira si estás bien encaminado con tu modelo.

- p) Adelante, comprueba lo bueno que es tu modelo en la predicción de tu experimento y defiende tu razonamiento.
- q) Compara el proceso y los resultados en los dos modelos: (1) la muerte y (2) la muerte con la inmigración. ¿Qué fue diferente en estos modelos? Explica.

Modelando la Muerte de M&M's	
Iteración	# de M&M's al inicio de la iteración
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Tabla 2. Modelando la Muerte e Inmigración de M&M's.

Otro enfoque: modelando cambio

Fue difícil, casi imposible, llegar directamente a una fórmula modelo para el modelo de muerte e inmigración, es decir, producir una fórmula para $b(n)$. Así que pensemos en cómo pasamos de generación en generación. Parecemos bastante confiados en que en cada iteración perdemos cerca de la mitad de nuestros M&M's (de nuevo, ¿por qué es así?), pero luego añadimos 10 M&M's como inmigrantes. Tu deberías ser capaz de saber cómo se ve la generación $n + 1$, $b(n + 1)$, en términos de la generación n , $b(n)$, e inmigración. Intenta predecir $b(n + 1)$ en términos de $b(n)$ e inmigración. Rellena lo siguiente:

$$b(n + 1) = \underline{\hspace{10cm}}.$$

¿Qué fue fácil y qué fue difícil al tratar de determinar qué poner al lado derecho de la expresión anterior para $b(n + 1)$? Vale la pena detenerse aquí en esta actividad de modelado inicial para saborear los momentos de descubrimiento y frustración y aprender de ellos. Entonces, reflexiona por un momento sobre lo que has logrado y lo que necesitaste para hacer exactamente eso: construir un modelo matemático.

No es irrazonable proponer varias posibilidades. Aquí hay varias. Explica lo que no es bueno de cada una. Trata de poner cada uno de estos modelos mal concebidos en palabras y compáralos con tu propia comprensión del proceso físico de lanzamiento y migración de M&M's.

$$\begin{aligned} b(n+1) &= 10 * b(n) + ,5 \\ b(n+1) &= 0,5 * 10 * b(n) \\ b(n+1) &= 0,5 * b(n+1) + 10 \\ b(n+1) &= -0,5 * b(n) + 10 \\ b(n+1) &= b(n+1)^n + 10 \\ b(n+1) &= (b(n+1) + 10)^n + 10 \end{aligned}$$

Digamos lo que queremos que el modelo haga en voz alta para nosotros mismos: “El valor de $b(n+1)$ debe ser la mitad de $b(n)$ debido a la muerte, más 10 debido a la inmigración.” ¿Esa oración se traduce directamente en matemáticas para ti? ¿Cómo se ve (1) como una traducción matemática?

$$b(n+1) = 0,5 * b(n) + 10. \quad (1)$$

Otra forma de ver (1) es modelar el *cambio* en cada generación y podemos hacerlo restando $b(n)$ de cada lado de (1) para obtener la ecuación,

$$b(n+1) - b(n) = 0,5 * b(n) - b(n) + 10 = -0,5b(n) + 10. \quad (2)$$

La ecuación (2) se conoce como *ecuación en diferencias*. Ahora traduce (2) en una oración y mira cómo te queda.

A menudo reemplazamos $b(n+1) - b(n)$ por los símbolos $\Delta b(n)$ para “cambio en $b(n)$.” Por lo tanto (2) podría escribirse de esta manera:

$$\Delta b(n) = -0,5b(n) + 10. \quad (3)$$

En las tres ecuaciones, (1), (2) y (3), necesitamos decirle a nuestro modelo dónde comenzar, es decir, $b(0) = 50$, porque esa es la cantidad de M&M's que teníamos en la taza al comienzo del experimento. Cada uno de estos tres pares de ecuaciones se puede denominar como una ecuación en diferencias con condición inicial. De hecho, reconocemos que al igual que en el cálculo donde podemos tener derivadas de *primer* y *segundo grado*, tendríamos ecuaciones en diferencias de *primer* y *segundo grado*. Nos ocuparemos de esto último en futuras actividades. El hecho de que tengamos una expresión lineal en $b(n)$ en el lado derecho de (3) sugiere que llamemos a tal ecuación *lineal*. Entonces, vemos que una buena manera de modelar nuestra actividad de muerte e inmigración es con una *ecuación en diferencias lineal de primer orden con condición inicial*. Eso es un trabalenguas, pero ahora deberías ver que cada uno de estos términos tiene significado.

Resolviendo nuestra ecuación en diferencias lineal de primer orden con condición inicial

Una cosa que podríamos hacer es usar un programa de hoja de cálculo, como *Excel*, para permitirnos iterar (1) en la Figura 1. Ya podemos ver algo sobre el comportamiento a largo plazo de nuestro modelo que parece coincidir con lo que vimos con nuestro experimento. ¿De qué se trata?

	A	B	C	D	E
1					
2		n	b(n)		
3		0	50		
4		1	35	<--- Using 0.5*C3+10	
5		2	27.5	<--- Using 0.5*C4+10	
6		3	23.75	<--- Using 0.5*C5+10	
7		4	21.875		
8		5	20.9375		
9		6	20.46875		
10		7	20.23438		
11		8	20.11719		
12		9	20.05859		
13		10	20.0293		
14		11	20.01465		
15		12	20.00732		

Figura 1. Usando la hoja de cálculo *Excel* para iterar (1).

Si estuviéramos en *Mathematica* podríamos usar el poderoso comando `RSolve`,

```
RSolve[{b[n + 1] == 1/2 b[n] + 10, b[0] == 50}, b[n], n]
```

para obtener la solución para $b(n)$,

$$b(n) = 20 + 15 * 2^{(1-n)}.$$

O podríamos conjeturar una solución, digamos de la forma $b(n) = k_1 + k_2 2^{(1-n)}$ y luego usar la información inicial y la primera iteración para determinar k_1 and k_2 .

Notamos que el comportamiento a largo plazo visto en nuestra Tabla 3 parece coincidir con las iteraciones de *Excel* que se encuentran en la Figura 1.

Pasando a un modelo de ecuación diferencial

Examinemos la ecuación (2), la cual se repite a continuación. Consideramos las perspectivas de modelar este sistema discreto con algunas matemáticas continuas que involucran no solo diferencias, sino también derivadas.

$$b(n + 1) - b(n) = -0,5 * b(n) + 10. \quad (2)$$

Supongamos que, en lugar de incrementos generacionales de 1, es decir, que van de n a $n + 1$, íbamos en incrementos de tiempo de Δn , e.g., $\Delta n = 0,01$. En este caso, no perderíamos la mitad de

Solución de RSolve para (1)	
n	$b(n)$
0.	50.0000
1.	35.0000
2.	27.5000
3.	23.7500
4.	21.8750
5.	20.9375
6.	20.4688
7.	20.2344
8.	20.1172
9.	20.0586
10.	20.0293

Tabla 3. Usando el comando `RSolve` de *Mathematica* para resolver (1).

nuestra población en un intervalo de tiempo de 1. Más bien perderíamos esta fracción, $(\Delta n) * 0,5$, de nuestra población en un pequeño intervalo de tiempo de longitud Δn . Además, no agregaríamos 10 inmigrantes en un intervalo de tiempo de 1, es decir, pasar de n a $n + 1$, sino que agregaríamos $(\Delta n) * 10$ inmigrantes en un intervalo de tiempo de longitud Δn . ¿Qué suposiciones acerca de nuestro proceso estamos haciendo cuando decimos estas cosas?) Esto generaría una nueva ecuación, donde nuevamente $b(n)$ es el tamaño de la población en el momento n :

$$b(n + \Delta n) - b(n) = -(\Delta n) * 0,5 * b(n) + \Delta n * 10. \quad (4)$$

Con la introducción de Δn percibimos la cercanía de la musa del cálculo, ya que podríamos tomar nuestros cambios de población aproximados en intervalos de tiempo cada vez más pequeños de longitud Δn . De hecho, en (4) podríamos dividir ambos lados por Δn

$$\frac{b(n + \Delta n) - b(n)}{\Delta n} = -0,5 * b(n) + 10, \quad (5)$$

y en (5) tomamos el límite como $\Delta n \rightarrow 0$, es decir, tomamos incrementos de tiempo cada vez más pequeños durante los cuales mueren M&M's y se da la inmigración. Esto resulta en (6)

$$\frac{db}{dn} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{b(n + \Delta n) - b(n)}{\Delta n} = -0,5 * b(n) + 10. \quad (6)$$

Esto se llama *ecuación diferencial* y si agregamos una condición inicial, en este caso, $b(0) = 50$, tenemos en (7) lo que se llama un *problema de valor inicial (PVI)*.

$$\frac{db}{dn} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{b(n + \Delta n) - b(n)}{\Delta n} = -0,5 * b(n) + 10, \quad b(0) = 50. \quad (7)$$

Tradicionalmente, cuando se estudian ecuaciones diferenciales dependientes del tiempo, la variable t se usa para el tiempo, digamos en segundos u horas. En consecuencia, escribimos nuestra ecuación diferencial como un PVI (8)

$$b'(t) = \frac{db}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b(t + \Delta t) - b(t)}{\Delta t} = -0,5 * b(t) + 10, \quad b(0) = 50, \quad (8)$$

o simplemente como (9) y nos referimos a ésta como una *ecuación diferencial lineal de primer orden con condición inicial*.

$$b'(t) = -0,5 * b(t) + 10, \quad b(0) = 50. \quad (9)$$

Ahora, ¿qué se supone que debemos hacer con esto? Bueno, esto, en parte, es de lo que se trata nuestro esfuerzo, es decir, resolver ecuaciones diferenciales o llegar a $b(t)$. Vimos lo difícil que era “adivinar” una solución en el caso discreto para $b(n)$ de (3) y será igual de difícil adivinar qué es $b(t)$ de (9).

Una poderosa estrategia de solución para resolver ecuaciones diferenciales y PVI

... bueno, al menos para el PVI (9).

Una estrategia es recurrir a la tecnología, en este caso *Mathematica*, y emplear su poder, específicamente para usar el comando `DSolve` para obtener una solución al instante. (¿Ves las partes del comando y la sintaxis en funcionamiento?) Hagámoslo ahora.

```
DSolve[{b'[t] == -1/2 b[t] + 10, b[0] == 50}, b[t], t]
```

que producirá

$$b(t) = 20 + 30e^{-t/2}. \quad (10)$$

En la Tabla 4 comparamos la solución iterada con nuestro modelo discreto de ecuación en diferencias que encontramos en *Excel* ($b(n)$ para $n = 0, 1, 2, \dots, 10$) con la solución de *Mathematica* a nuestro modelo continuo de ecuación diferencial para $b(t)$, $t \geq 0$.

Hay una ligera diferencia en los valores iniciales para $n = t = 1, 2, 3, 4, 5$, pero luego ambos modelos parecen “establecerse” y se dirigen hacia el mismo valor de aproximadamente 20. ¿Qué nos dice esto?

Pasando a una nueva realidad

Digamos ahora que estamos estudiando un organismo (digamos un microorganismo en una placa de Petri) y perdemos el 50% de la población cada hora, pero a través de una escotilla unidireccional pueden ingresar unos 10 microorganismos por hora en nuestra placa de Petri. Tómate un momento

n or t	$b(n)$	$b(t)$
0.	50.0000	50.0000
1.	35.0000	38.1959
2.	27.5000	31.0364
3.	23.7500	26.6939
4.	21.8750	24.0601
5.	20.9375	22.4625
6.	20.4688	21.4936
7.	20.2344	20.9059
8.	20.1172	20.5495
9.	20.0586	20.3333
10.	20.0293	20.2021

Tabla 4. Comparando los resultados de nuestro modelo discreto de ecuación en diferencias ($b(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, 10$) (2) con nuestro modelo continuo de ecuación diferencial ($b(t)$, $t \geq 0$) (9) .

para modelar esta situación con (a) un modelo discreto de ecuación en diferencias y (b) un modelo continuo de ecuación diferencial , asegurándote de identificar variables y unidades. ¿Cuáles son los pros y los contras de cada modelo cuando consideramos tales situaciones?

Escriba el modelo discreto a la izquierda y el modelo continuo a la derecha. Debajo de los modelos, discuta los pros y los contras de cada uno para modelar esta situación.