



www.simiode.org
SIMIODE Systemic Initiative for Modeling
Investigations and Opportunities with Differential Equations

VERSIÓN DEL ESTUDIANTE INTRODUCCIÓN A SEGUNDO ORDEN

Brian Winkel
Director de SIMIODE
Cornwall NY USA

Traducido por Migdonio González
Universidad Tecnológica de Panamá
Ciudad de Panamá, Panamá

ENUNCIADO

Ecuaciones del tipo (1) y (2)

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0, \quad (1)$$

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0, \quad (2)$$

surgirán, como veremos, con bastante frecuencia en cualquier estudio de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Hay varias formas de resolverlas y, por lo tanto, obtener información sobre la aplicación bajo estudio. La forma más común y tradicional hace uso de la fórmula cuadrática para las raíces de una ecuación cuadrática. Eso es correcto. La fórmula que todos aprendimos en el álgebra temprana en la escuela secundaria es la clave para resolver la clase más amplia de ecuaciones diferenciales. Pero podemos decir más al respecto, y lo haremos.

El mundo funciona con ecuaciones diferenciales de segundo orden

... y las soluciones dependen de la ecuación cuadrática! Es verdad. El movimiento requiere fuerzas y las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden explicarse de dos maneras: (1) la masa del cuerpo multiplicada por la aceleración que posee y (2) la suma de todas las fuerzas externas que actúan

sobre la masa. La condición (1) puede ser modelada por $m \cdot y''(t)$ donde m es la masa de un cuerpo en una unidad razonable y consistente (kilogramos, gramos, slugs, etc.) y $y(t)$ es el desplazamiento unidimensional desde algún punto de equilibrio o punto fijo en alguna unidad razonable (metros, centímetros, pies, etc.) de modo que $y''(t)$ es la aceleración que experimenta la masa. La condición (2) se refiere a $\sum_{i=1}^n (\text{Fuerza Externa})_i$. La segunda ley de Newton dice que estas dos cuentas deben dar el mismo resultado, es decir, el producto de la masa y la aceleración aplicada a esa masa es igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre esa masa. Esto nos da la formulación matemática de (3):

$$m \cdot y''(t) = \sum_{i=1}^n (\text{Fuerza Externa})_i. \quad (3)$$

Si podemos identificar, formular y explicar las Fuerzas Externas que actúan sobre nuestro cuerpo, entonces hemos construido una ecuación diferencial, aunque con una segunda derivada, no solo una primera derivada como hemos estudiado previamente. Esto será un desafío, pero si el título de nuestra sección es correcto, “ El mundo funciona con ecuaciones diferenciales de segundo orden ”, entonces será un desafío muy gratificante.

Resortes

Considere un resorte suspendido de una barra con una masa unida al fondo del resorte. Además, la masa y una buena porción del resorte unido se sumerge en un cilindro de líquido. El cilindro de fluido a menudo se conoce como *amortiguador*. Tomamos una varilla delgada, la introducimos al cilindro, empujamos hacia abajo la masa y retiramos la varilla, estirando así el resorte.

a) Describa lo que sucede y explique por qué cree que su descripción refleja la realidad.

¿Qué tipo de fuerzas podrían ser las fuerzas externas que actúan sobre la masa? Una fuerza obvia es la fuerza debido a la gravedad y es simplemente $m \cdot g$ donde m es nuestra masa y g es la aceleración debida a la gravedad que generalmente se mide en unidades como m/s^2 (MKS sistema metro-kilogramo-segundo) o cm/s^2 (sistema CGS centímetro-gramo-segundo) donde m son metros, mientras que s son segundos y cm son centímetros.

Trabajemos en el sistema MKS y por lo tanto $m \cdot g$ tiene unidades $kg \cdot m/s^2$. Si aceleramos un kilogramo a una velocidad de un metro por segundo cada segundo, entonces tenemos una fuerza cuya magnitud es 1 y en este caso llamamos a esta 1 unidad de fuerza un *Newton*. Si estuviéramos en el sistema CGS tendríamos una noción comparable de fuerza, ya que si aceleramos un gramo a una velocidad de un centímetro por segundo cada segundo, entonces tenemos una fuerza cuya magnitud es 1 y en este caso llamamos a esta unidad 1 de fuerza una *dina*.

Entonces, volvamos a nuestro resorte. Lo que a menudo hacemos es construir un Diagrama de cuerpo libre (FBD) en el que simplemente aislamos el cuerpo o la masa que deseamos analizar y, en forma de imagen, dibujamos flechas que indican la dirección de las fuerzas que actúan sobre este cuerpo. La fuerza, por supuesto, es una cantidad vectorial y tiene magnitud y dirección. Ambos

serán muy importantes en nuestro análisis. Entonces vemos que nuestra masa tiene una fuerza hacia abajo (¿de acuerdo?) Debido a la gravedad de magnitud $m \cdot g$. Mostramos esto en la Figura 1 con más detalles para una serie de casos posibles y otras fuerzas que encontraremos.

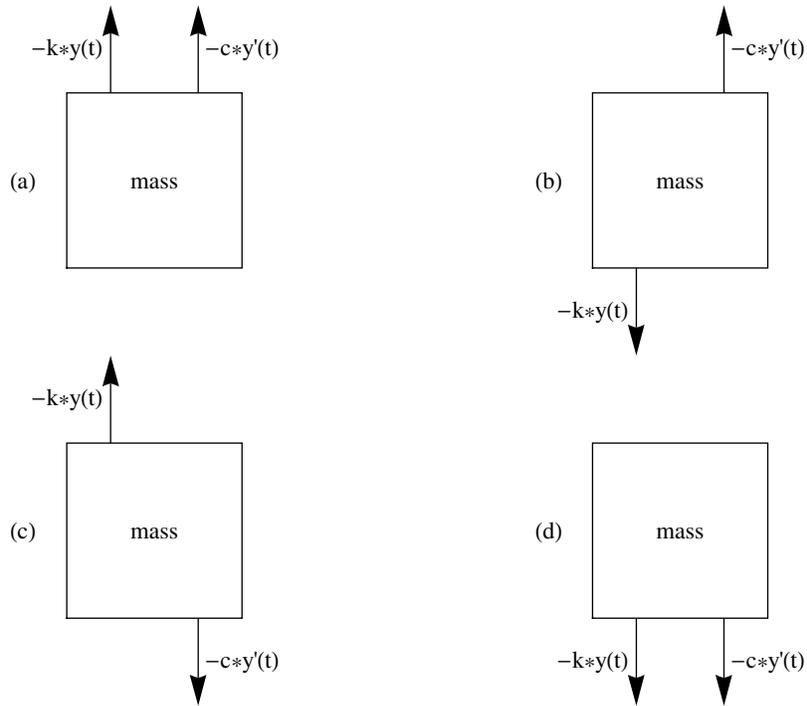


Figura 1. Todas las variaciones posibles de (1) fuerza de restauración ($k \cdot y(t)$) y (2) fuerza de resistencia debido a la velocidad $c \cdot y'(t)$.

Ahora visualiza esto. Colocamos la masa al final del resorte y la apoyamos suavemente mientras se estira el resorte y queda en reposo. Esta posición de descanso a menudo se llama *equilibrio estático*. SI la gravedad está tirando la masa hacia abajo y está en reposo (¿de acuerdo?), entonces debe haber una fuerza contraria empujando hacia arriba. ¿Qué podría ser? Bueno, piensa en lo que sucede cuando tiras de un resorte o lo estiras. ¿Qué quiere hacer? Quiere restablecerse a su posición original. “Déjame en reposo”, nos dice. Por lo tanto, hay una fuerza que llamamos *fuerza restauradora*. ¿Cómo podríamos calcular esta fuerza? Bueno, podríamos ir al laboratorio con nuestro resorte estirarlo 0.1 m y medir la fuerza que tira sobre nosotros mientras mantenemos la masa en su lugar; luego estirar el resorte 0.2 m y medir la fuerza que tira sobre nosotros mientras mantenemos la masa en su lugar; luego 0.4 m, etc. Si registramos todas estas fuerzas encontraremos una relación muy (¡MUY!) interesante entre la fuerza (F en Newtons) para desplazar un resorte x metros. Buscamos en la historia para descubrir cuál podría ser esta relación.

En física, la Ley de elasticidad de Hooke establece que la extensión de un resorte elástico es linealmente proporcional a su tensión.

La ley tiene un límite, llamado *límite elástico*, o *límite de elasticidad*, después del cual los resortes sufren deformación plástica hasta el límite plástico o límite de plasticidad, después se rompen. ¿Alguna vez has estirado un juguete Slinky hasta el momento que no tiene fuerza de restauración? De hecho, esto arruina la diversión con el Slinky!

Lleva el nombre del físico del siglo XVII Robert Hooke, quien inicialmente lo publicó como un anagrama *ceiinossttuv*, que luego reveló que significaba *ut tensio sic vis* o “ como la extensión, la fuerza ”.

“ Linealmente proporcional ”, ¿eh? Eso simplemente significa $F = k \cdot x$ donde k es una constante de proporcionalidad con unidades N/m para Newton por metro. Esto significa que por cada metro que deseamos estirar nuestro resorte tendremos que ejercer k Newtons. Muchos de nosotros hicimos un laboratorio de física en la escuela secundaria en el que colgamos pesas o masas sucesivas en un resorte y medimos el desplazamiento. Fue increíble, ya que resultó ser una gráfica lineal $F = k \cdot x$.

Nuevamente, volvamos a nuestro resorte. Encontramos que cuando colgamos una masa de m kg en el extremo del resorte que cuelga verticalmente, sometemos el resorte a una fuerza de $m \cdot g$ N y si conocemos nuestra constante de resorte k (que a menudo es ofrecido por el fabricante o podemos obtener una colección simple de algunos puntos de datos para determinar la relación lineal $F = k \cdot x$ y, por lo tanto, el valor de k), entonces podemos dibujar otra fuerza que actúe sobre nuestro resorte, a saber, $k \cdot y(t)$ donde k es la constante de resorte con unidades N / m y $y(t)$ es el desplazamiento vertical con unidades m. (Observa esta fuerza en la Figura 1).

Esto es MUY IMPORTANTE. Ten en cuenta que cuando colocamos nuestra masa en el resorte y dejamos que el resorte se estire suavemente y quede en reposo o se equilibre a una longitud extendida de y_e , tenemos dos fuerzas iguales y opuestas, a saber, $m \cdot g$ debido a la gravedad, hacia abajo y $k \cdot y_e$ (en este caso cuando $t = 0$) debido a la fuerza de restauración del resorte, hacia arriba. Se cancelan porque vemos que la masa está en reposo, por lo que sin movimiento significa que las dos fuerzas son iguales y opuestas.

Acordemos que distancias y direcciones positivas sean hacia abajo (completamente arbitrarias, pero debemos ser consistentes). Esto significa en (3) para nuestra ecuación diferencial ahora tenemos

$$\begin{aligned} m \cdot y''(t) &= \sum_{i=1}^n (\text{Fuerza Externa})_i = m \cdot g - k \cdot y_e + \text{otras Fuerzas Externas} \\ &= 0 + \text{otras Fuerzas Externas} = \text{otras Fuerzas Externas}, \end{aligned} \quad (4)$$

donde $m \cdot g - k \cdot y_e = 0$. Entonces estamos en camino. Ahora continuemos desarrollando nuestra ecuación diferencial (4) descubriendo cuáles podrían ser estas otras fuerzas.

Si encontramos que nuestro resorte se extiende hacia abajo (más allá de la longitud y_e) en el tiempo t , digamos una longitud extendida de $y(t) > 0$, entonces habrá una fuerza de restauración

debido a la Ley de Hooke hacia arriba de tamaño $k \cdot y(t)$. De manera similar, si encontramos que nuestro resorte está comprimido hacia arriba (por encima de la longitud y_e) en el tiempo t , digamos una longitud extendida de $y(t) < 0$, entonces habrá una fuerza de restauración debido a la Ley de Hooke hacia abajo de tamaño $k \cdot y(t)$, que denotamos como $-k \cdot y(t)$.

Para diversos fenómenos, se ha estudiado la noción de resistencia debida a los medios o dispositivos en sí. En movimiento de baja velocidad en líquido, las consideraciones empíricas y teóricas apoyan la conclusión de que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad del objeto, es decir, $c \cdot y'(t)$, mientras que en movimientos de mayor velocidad como paracaídas, balas, fuselajes de aviones, etc., la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto, es decir, $c \cdot (y'(t))^2$. Por lo tanto, para ciertos tipos de situaciones físicas todavía tenemos un término lineal, mientras que otros puede parecer un término cuadrático.

Ahora tenemos que discutir exactamente qué está haciendo el resorte al comienzo, $t = 0$ s, de nuestro experimento. Supongamos que empujamos nuestro resorte hacia abajo (también podría ser hacia arriba), es decir, inicialmente extendemos el resorte más allá de su posición de equilibrio estático, es decir $y(0) = y_0$ m ($y_0 > 0$ si está hacia abajo y $y_0 < 0$ si está hacia arriba). Además, decidimos impartir una velocidad inicial de $y'(0) = v_0$ ($v_0 > 0$ si se mueve hacia abajo y $v_0 < 0$ si se mueve hacia arriba). Tenemos cuatro casos posibles, para las diferentes combinaciones de signos de $y(t)$ y $y'(t)$. Los resumimos a continuación y luego los representamos en la Figura 1.

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| (a) $y(t) > 0$ y $y'(t) > 0$ | (b) $y(t) < 0$ y $y'(t) > 0$. |
| (c) $y(t) > 0$ y $y'(t) < 0$ | (d) $y(t) < 0$ y $y'(t) < 0$. |

Recuerda que las flechas hacia arriba están en la dirección negativa y las flechas hacia abajo están en la dirección positiva. Así, en el caso (a) ya que $y(t) > 0$ y $y'(t) > 0$ y ambos $k, c > 0$ tenemos fuerzas ascendentes aplicadas a nuestra masa ya que $y(t) > 0$ significa que la masa se ha extendido o estirado hacia abajo y la fuerza de restauración es hacia arriba, mientras que $y'(t) > 0$ significa que el movimiento es hacia abajo y la fuerza de resistencia es hacia arriba. Debe verificar cada caso y asegurarse de que la contabilidad sea correcta, así como los diagramas. Esto se ilustra en la Figura 1. ¿Puedes dibujar los diagramas de cuerpo libre por tu cuenta?

Estamos listos para resumir nuestras “ otras fuerzas externas ”. No importa cuál de los cuatro casos (a) - (d) consideremos, las “ otras fuerzas externas ” suman de la misma manera, $-k \cdot y(t) - c \cdot y'(t)$. Por lo tanto, nuestra ecuación diferencial que describe la posición de la masa del resorte está evolucionando de acuerdo a

$$\begin{aligned}
 m \cdot y''(t) &= \sum_{i=1}^n (\text{Fuerza Externa})_i = \underbrace{m \cdot g - k \cdot y_e}_{0 \text{ a equilibrio estatico}} + \text{otras Fuerzas Externas} \\
 &= \text{otras Fuerzas Externas} \\
 &= -k \cdot y(t) - c \cdot y'(t),
 \end{aligned}$$

hacia la ED (5) con nuestras condiciones iniciales $y(0) = y_0$ y $y'(0) = v_0$:

$$m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t) - c \cdot y'(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0. \quad (5)$$

La ecuación (5) se llama ecuación diferencial *masa-resorte amortiguado* para un resorte oscilante con masa unida y, si podemos resolverlo, podremos predecir cómo se comportará nuestro resorte al obtener una función que representa $y(t)$, el desplazamiento en metros de la masa al final del resorte en el tiempo t en segundos. ¿Estás listo para resolver? Bueno, vamos por ello!

Primero, señalamos que (5) a menudo se escribe como ecuación diferencial (6):

$$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0. \quad (6)$$

Muy a menudo en realidad $v_0 = 0$ ya que realmente tendríamos problemas para impartir de manera consistente una velocidad establecida a nuestra configuración de masa-resorte bajo el agua,

Esta ecuación es un ejemplo de *ecuación diferencial lineal, de segundo orden, con coeficientes constantes, homogénea con condiciones iniciales*; de segundo orden porque tiene una segunda derivada; coeficientes constantes porque todos los términos de la función tienen coeficientes constantes; lineal porque tenemos todas las derivadas y la función que queremos resolver; y homogénea porque no hay términos que no sean términos no incluyan a nuestra función, $y(t)$ y su derivada.

Antes de intentar una solución general de (6) consideremos que la situación fuera $c = 0$, es decir, donde no hay resistencia debido a los medios en los que se asienta la configuración de masa-resorte. Esto es irreal, porque todos los objetos de masa-resorte en movimiento se encontrarán con resistencia, ya sea a la fricción interna o a la resistencia de los medios externos. Sabemos esto porque no oscilan para siempre. Sin embargo, estudiemos este sistema de masa-resorte, presumiblemente comprado en nuestra “Tienda de Física Ideal” local donde se ofrecen a la venta cosas como máquinas de movimiento perpetuo a precios rebajados, ¡sin duda! Si $c = 0$ entonces tenemos la siguiente ecuación diferencial (7):

$$m \cdot y''(t) + k \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0. \quad (7)$$

- a) Supongamos que tenemos una masa de $m = 1\text{kg}$ y nuestra constante de resorte fue $k = 1\text{ N / m}$. Además, supongamos que desplazamos nuestra masa $y(0) = 1\text{ m}$ y le damos una velocidad inicial de $y'(0) = 0\text{ m/s}$, es decir, ¿podemos encontrar una solución de la ecuación diferencial (8)?

$$y''(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (8)$$

Piensa bien y pregúntate si conoces alguna función $y(t)$ que tenga la propiedad de que cuando se suma la función y su segunda derivada obtienes 0. ¡Te pedimos que pienses mucho, pero no demasiado! Escribe dos de esas funciones. Sugerencia: están en la misma familia de funciones.

$$y_1(t) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{y} \quad y_2(t) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Por cierto, la función $y(t) = 0$ no cuenta, ya que es a lo que llamamos *solución trivial* y no nos dará nada útil en nuestra solución modelo. Consulta con sus vecinos para ver qué tienen.

He aquí una de las bellezas de las ecuaciones diferenciales homogéneas lineales. Si tiene dos soluciones, digamos $y_1(t)$ y $y_2(t)$, puede sumarlas para obtener una nueva función $y_{\text{nueva}}(t) = y_1(t) + y_2(t)$ y encontrarás que $y_{\text{nueva}}(t)$ todavía satisface la misma ecuación diferencial. Sigue adelante y tómate el tiempo para verificar y ver que cuando sumas tus dos soluciones candidatas que la suma de ellas también es una solución. Esto significa sustituir directamente $y_{\text{nueva}}(t) = y_1(t) + y_2(t)$ en $y''(t) + y(t) = 0$, y ver si se cumple la ecuación, es decir, toma la segunda derivada de su nueva y_{nueva} y súmala a y_{nueva} y comprueba que sale 0. ¡Hazlo!

De hecho, si tomas un múltiplo de una solución para dicha ecuación diferencial, digamos a por $y_1(t)$ para obtener $y_{\text{multiplo}}(t) = a \cdot y_1(t)$ luego $y_{\text{multiplo}}(t)$ también será una solución. Sigue adelante y pruébalo con una de tus soluciones candidatas. Usa el mismo proceso que hicimos para verificar que $y_{\text{nueva}}(t)$ satisface la misma ecuación diferencial.

Ahora viene un hecho realmente bueno. Siempre hay una gran cantidad de teoría que apoya las matemáticas aplicadas y uno de los resultados de la teoría dice aproximadamente que si pudiéramos producir dos soluciones de una ecuación diferencial homogénea lineal, digamos como dos candidatos, $y_1(t)$ y $y_2(t)$, y si estas soluciones no son múltiplos escalares entre sí (no hay una constante c tal que $y_1(t) = c \cdot y_2(t)$ - esta condición se llama *independencia lineal*, lo que significa en este caso $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son *linealmente independientes*), entonces la *solución completa*, llamada solución *general* (8), siempre tendrá la forma $y_{\text{general}}(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)$. Ah, esa es la palabra clave *forma*, un término bastante amorfo. Pero tómate el tiempo ahora para verificar que para tus soluciones candidatas $y_1(t)$ y $y_2(t)$ la $y_{\text{general}}(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)$ ES, de hecho, una solución a la ecuación diferencial (8). ¡Hazlo!

Aquí tenemos una maravillosa noticia. En un esfuerzo por determinar exactamente qué son c_1 y c_2 en el caso de nuestra ecuación (8) ¿qué información podríamos usar para determinar c_1 y c_2 ? Te dejaremos reflexionar sobre eso por un momento. Sigue adelante y hazlo, y determina cuáles son c_1 y c_2 para que la solución general $c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)$ sea en realidad la solución única a nuestra ecuación diferencial (8) *con* condiciones iniciales (¡las dos últimas palabras son una pista!)

N.B.: Los ingenieros se refieren a esta adición de múltiplos escalares de dos soluciones para obtener una solución general como *superposición*. Nosotros lo llamamos ¡La adición de múltiples escalares de dos soluciones para obtener una solución general!

Informa tus conclusiones en palabras Y en símbolos matemáticos y asegúrate de verificar que tu solución única final ES realmente una solución.

- b) Ahora, mira tu solución de (a) anterior y pregunta: “¿Es razonable que esta función sea una solución a nuestra ecuación diferencial de masa-resorte (aunque ideal) (8)? ” haz eso y escribe tu argumento sobre por qué ES razonable o no. Tómate el tiempo para celebrar esta noticia. ¡Choca esos cinco con tu compañero de habitación! ¡Date un capricho! ¡Tómate un descanso y juega al ping-pong en la sala de recreo del dormitorio! Adelante y hazlo, te lo mereces, pero

regresa y reflexiona sobre lo que acabas de hacer y prepárate para seguir adelante.

Ahora las ecuaciones diferenciales vienen en todos los tamaños y variaciones, y algunas modelan la realidad y otras no. Considera la siguiente ecuación diferencial que podría no tener ninguna base en la realidad, pero es un ejemplo de una ecuación diferencial que vale la pena por lo que nos enseñará.

$$y''(t) = y(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1. \quad (9)$$

Esto nos pide que encontremos una función $y(t)$ tal que cuando tomemos su segunda derivada obtengamos la misma función. Hmmmmmm !!! ¿Conoces alguna función como esa? Claro que sí, $y(t) = e^t$, de hecho, su amigo $y(t) = e^{-t}$ hace lo mismo. ¡Claro que $y(t) = 0$ es un candidato, pero estamos realmente interesados en la sustancia, en las cosas, y $y(t) = 0$ no son cosas! Ahora recuerda que si tenemos dos soluciones, digamos $y_1(t) = e^t$ y $y_2(t) = e^{-t}$ podemos formar una combinación lineal $c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$ y esa combinación también será una solución. Además, si podemos obtener dos soluciones linealmente independientes y agregarlas, sabemos que habremos encontrado la solución más general a la ecuación diferencial (9) - en el caso de que tengamos una ecuación diferencial de segundo orden a saber

$$y_{\text{general}}(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}.$$

¿Cómo encontramos estas dos constantes c_1 y c_2 de todo el conjunto posible de constantes? No olvidemos que cada ecuación diferencial que estudiaremos generalmente proviene de una situación física (¡bueno, esta no!) Y además de alguna ley física o natural en la formulación de la ecuación en sí, también tenemos condiciones iniciales, en este caso, $y(0) = 2$ y $y'(0) = 1$.

- c) Usa las condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = 1$ para determinar las constantes c_1 y c_2 en nuestra solución general $y_{\text{general}}(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$ de ecuación diferencial (9) y así recuperar LA solución a esta ecuación diferencial.

En clase, cuando trabajamos con estudiantes, a menudo les decimos que tarareen un mantra de la forma “ Hmmmmm ”, cuando están en el punto de su solución donde van a aplicar las condiciones iniciales para exigir LA solución única a su ecuación diferencial resolviendo las constantes c_1 y c_2 , ¡de esa manera sabemos que están en el camino correcto durante los exámenes! ¡La sala está viva con varios tonos de “ Hmmmmm! ” Inténtalo. Funciona y te recordará que casi has terminado de resolver la ecuación diferencial. Si bien ni siquiera interpretamos a un médico en televisión, somos médicos y recomendamos encarecidamente esta terapia.

Por lo tanto, estamos desarrollando un enfoque bastante bueno para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales, excepto por una cosa: aparentemente se espera que adivinemos nuestra solución y luego construyamos a partir de nuestras conjeturas. En cierto sentido, eso es cierto y haremos una

aproximación más a la suposición, pero QUÉ suposición será. Hemos visto suficiente, creemos, que estás listo para entrar en el serio juego de adivinanzas. Listo, aquí vamos.

Considera la ecuación diferencial (10) (repetida aquí para facilitar la referencia) de nuestro sistema masa-resorte amortiguado:

$$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0. \quad (10)$$

Supón que la solución a la ecuación diferencial (10) tiene la forma $y(t) = e^{\lambda t}$ (donde λ es la letra griega minúscula “ lambda. ”) Tal estrategia podría llamarse adivinar, pero preferimos (tut! Tut!) llamar a esto conjeturar. De hecho, si probáramos sustituir $y(t) = e^{\lambda t}$ en la ecuación (10) y esto produjera dos soluciones linealmente independientes TODO EL TIEMPO eso sería genial, pero veamos qué podría implicar esto. Necesitaremos $y'(t)$ y $y''(t)$: no es tan difícil hallarlas para la función $y(t) = e^{\lambda t}$.

- d) Pon tu conjetura $y(t) = e^{\lambda t}$ en la ecuación diferencial (10) y ve qué sucede. Adelante. No seas tímido. ¡Simplemente hazlo! Explica lo que pasa. ¿Hay algo familiar en algún lugar del proceso? ¿Qué haces con ese objeto familiar para continuar? Explica y asegúrate de reconocer que aprendiste esto de tu maestra de álgebra al principio de tus viajes matemáticos, llamémosla Sra. Baumgartner, y le agradeceremos todo lo que hizo por nosotros cada vez más a medida que nuestro estudio continúa. Créeme, pensarás que ella fue la mejor persona en tu vida a medida que avanzamos. Te alentaremos a que le envíes una nota de agradecimiento de vez en cuando.
- e) Hay muchas cosas que pueden suceder al final del juego (d) anterior, pero consideremos un modelo específico del sistema masa - resorte amortiguado con números (¡porque a todos nos gustan los números!) Considere la ecuación diferencial (10) con $m = 1$ kg, $c = 7$ N / (m / s) y $k = 12$ N / m, con condiciones iniciales $y(0) = 1$ m y $y'(0) = 0$. Describe esta situación en palabras de la manera más completa posible y dibuja un diagrama para ilustrar lo que estamos a punto de estudiar.

Hagamos la conjetura, $y(t) = e^{\lambda t}$, y sustituyámosla en la ecuación diferencial que acabas de escribir. Sigue el rastro, haz lo que resulte natural, produce dos soluciones linealmente independientes, toma una combinación lineal de ellas para formar una solución general, luego (¡Hmmmm!) Usa tus condiciones iniciales para determinar sus dos constantes c_1 y c_2 , y siéntate y mira tu solución final única para tu ecuación diferencial. Traza la solución y describe lo que sucede a medida que pasa el tiempo para este sistema de masa - resorte amortiguado.

- f) En (e) cambia la resistencia debido a la constante del medio, c , de 7 N / (m / s) a 13 N / (m / s). (Pregúntate, “ ¿Qué acabamos de hacer físicamente? ”) Nuevamente, usa tus condiciones iniciales para determinar tus dos constantes c_1 y c_2 , y siéntate y mira tu solución final única para tu ecuación diferencial. Grafica la solución y describe lo que sucede a medida que pasa el tiempo para este sistema masa - resorte amortiguado. Ahora compara tus respuestas completas con las de (e) Grafica AMBAS soluciones de (e) y de (f) en los mismos ejes para $t \in [0, 5]$ s. Describe lo más completamente posible lo que está sucediendo y lo que te dicen estos gráficos. Aquí hay

un comando que podría ayudarte a ver mejor las cosas si estás utilizando *Mathematica*:

```
Plot[{ys1[t], ys2[t]}, {t, 0, 5},
      PlotStyle ->{Thickness[.001], Thickness[.005]}]
```

Volvamos a la situación más general en la ecuación diferencial (10) y usemos un comando obviamente poderoso DSolve en *Mathematica* para señalar el camino para futuros estudios. Primero obtenemos una solución, tomamos la solución, la nombramos y la expandimos.

```
ysol[t_] = y[t] /. DSolve[{m y''[t] + c y'[t] + k y[t] == 0, y[0] == y0,
      y'[0] == v0}, y[t], t][[1]] // Expand
```

Aquí está la salida que *Mathematica* da.

$$\begin{aligned} \text{ysol}(t) = & -\frac{m v_0 e^{\frac{t(-\sqrt{c^2-4km}-c)}{2m}}}{\sqrt{c^2-4km}} + \frac{m v_0 e^{\frac{t(\sqrt{c^2-4km}-c)}{2m}}}{\sqrt{c^2-4km}} + \frac{1}{2} y_0 e^{\frac{t(-\sqrt{c^2-4km}-c)}{2m}} \\ & + \frac{1}{2} y_0 e^{\frac{t(\sqrt{c^2-4km}-c)}{2m}} - \frac{c y_0 e^{\frac{t(-\sqrt{c^2-4km}-c)}{2m}}}{2\sqrt{c^2-4km}} + \frac{c y_0 e^{\frac{t(\sqrt{c^2-4km}-c)}{2m}}}{2\sqrt{c^2-4km}} \end{aligned} \quad (11)$$

¡¡¡Increíble!!! ¿Eso es hermoso o qué? Miremos cuidadosamente (con un bisturí quirúrgico) partes de esta solución. Vemos $\frac{-c-\sqrt{c^2-4km}}{2m}$ y $\frac{-c+\sqrt{c^2-4km}}{2m}$ apareciendo por todas partes. ¿Que son estos? ¿De dónde vienen? Piensa en lo que la Sra. Baumgartner te enseñó, luego responde. Intenta responder esta pregunta antes de continuar, pero piensa en varias cosas (1) nuestra ecuación diferencial original $m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$, (2) nuestra conjetura $y(t) = e^{\lambda t}$, (3) qué obtienes cuando sustituyes esta conjetura en la ecuación diferencial (10), y (4) el álgebra resultante que la Sra. Baumgartner te enseñó a manejar. ¡Hazlo!

¿Dónde se encuentran estas expresiones, $\frac{-c-\sqrt{c^2-4km}}{2m}$ ¿ocurre en nuestra solución? Pues, en el exponente de e de nuestra conjetura de la forma $y(t) = e^{\lambda t}$.

- f) Escribe un ensayo corto en el que describes lo que crees que está sucediendo con respecto a nuestra solución de la ecuación diferencial $m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$. Sé lo más completo posible y salta y especula. Esto no es ciencia ficción, sino ciencia observacional o natural, basada en lo que has visto hasta ahora. Seguiremos hablando de esto más adelante.
- g) Informa qué sucede en (11) si establecemos solo $v_0 = v_0 = 0$. Explica detalladamente. ¿Qué pasa si establecemos solo $y_0 = y_0 = 0$? Explica detalladamente. ¿Qué pasa si establecemos $v_0 = v_0 = 0$ y $y_0 = y_0 = 0$. Explica detalladamente. ¿Qué hemos hecho físicamente en este último caso? Al igual que dice tu hermano o hermana, podemos decir del último caso: “ Esto es muy aburrido ”. ¿No estás de acuerdo? ¿Estás de acuerdo con su hermano o hermana?

Parece que las funciones exponenciales están apareciendo por todas partes y podrían ser un área fértil para buscar soluciones a nuestra ecuación diferencial (10). Hagamos eso.

- h) Para la ecuación diferencial (10) pon una conjetura de la forma $y(t) = e^{\lambda t}$ en la ecuación y mira a qué conduce. ¿Qué condiciones se imponen sobre λ como resultado directo de tu conjetura y sustitución? ¿Qué diría la Sra. Baumgartner sobre tu situación? Escribe lo que tendrías que hacer para obtener dos (¿Entendido? DOS) soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$? Ahora lo intentaremos con algunos números, para algunos de ustedes, una zona de confort.
- i) Considera la ecuación diferencial (12):

$$1 \cdot y''(t) + 6 \cdot y'(t) + 5 \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \quad (12)$$

Coloca tu conjetura, $y(t) = e^{\lambda t}$, en la ecuación diferencial (12). Luego, de nuevo como en (d) (nunca está de más repetir un procedimiento para consolidarlo) sigue el rastro, haz lo que resulte natural, produce dos soluciones linealmente independientes, toma una combinación lineal de ellas para formar una solución general, luego (Hmmmmm !) usa tus condiciones iniciales para determinar tus dos constantes c_1 y c_2 , y siéntate y mira tu solución final única para tu ecuación diferencial. Grafica la solución y describe lo que sucede a medida que pasa el tiempo para este sistema de masa-resorte amortiguado.

- j) Probemos con otro. Algo aterrador podría suceder en este caso, pero no te preocupes. Estamos aquí para ayudar.

$$1 \cdot y''(t) + 6 \cdot y'(t) + 25 \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \quad (13)$$

Coloca tu conjetura, $y(t) = e^{\lambda t}$, en la ecuación diferencial (13). Luego, de nuevo como en (d) sigue el rastro, haz lo que resulte natural, produce dos soluciones linealmente independientes, toma una combinación lineal de ellas para formar una solución general, luego (Hmmmmm !) usa tus condiciones iniciales para determinar tus dos constantes c_1 y c_2 , y siéntate y mira tu solución final única para tu ecuación diferencial. Asegúrate de graficar tu solución.

¿Cuál es la ÚNICA diferencia entre el modelo de la ecuación diferencial de masa-resorte amortiguado en (j) de aquel en (i)? Sugerencia: recuerda el significado físico de cada uno de los coeficientes constantes. Argumenta que esta diferencia podría ser suficiente para explicar los diferentes comportamientos que muestran las gráficas de la posición de la masa al final del resorte.

- k) Aquí hay otra ecuación diferencial (14)

$$1 \cdot y''(t) + 6 \cdot y'(t) + 130 \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \quad (14)$$

Nuevamente, coloca tu conjetura, $y(t) = e^{\lambda t}$, en la ecuación diferencial (14). Luego sigue el rastro, haz lo que resulte natural, produce dos soluciones linealmente independientes, toma una combinación lineal de ellas para formar una solución general, luego (¡Hmmmmm!) usa tus condiciones iniciales para determinar tus dos constantes c_1 y c_2 , y siéntate y mira tu solución final única para tu ecuación diferencial. Asegúrate de graficar tu solución.

¿Cuál es la ÚNICA diferencia entre el modelo de ecuación diferencial de masa-resorte amortiguado en (k) de aquel en (i) y (j)? Argumenta que esta diferencia podría ser suficiente para

explicar los diferentes comportamientos mostrados por las gráficas de la posición de la masa al final del resorte.

Esta aritmética compleja ES aterradora y nos gustaría eliminarla, ya que puede incomodarte. Francamente, no incomoda a algunas personas, por ejemplo, a los ingenieros eléctricos les encanta el número imaginario $i = \sqrt{-1}$, ¡solo que lo llaman j ! Bueno, Leonhard Euler viene al rescate por nosotros con una hermosa verdad matemática, ahora llamada Identidad de Euler:

$$e^{i\omega} = \cos(\omega) + i \sin(\omega). \quad (15)$$

Aquí esta i , por supuesto, nuestra raíz cuadrada imaginaria de -1, mientras que ω representa la letra griega omega en minúscula. Por cierto, *Mathematica* conoce la identidad de Euler (¡y más!). Puedes ver esto aplicando el comando `ComplexExpand` a, digamos e^{3i} o incluso e^{3it} .

$$\text{ComplexExpand}[\text{Exp}[3 I]] = \underline{\hspace{10cm}} .$$

$$\text{ComplexExpand}[\text{Exp}[3 I t]] = \underline{\hspace{10cm}} .$$

Lo que la Identidad de Euler nos permite hacer es cambiar las expresiones con i en el exponente de e y así reducir las fórmulas desordenadas con i en una función exponencial a una que tenga i como coeficiente de un término seno. Por cierto, para la fórmula más hermosa en matemáticas, usa la identidad de Euler para calcular

$$e^{i\pi} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

Este conjunto de símbolos lo tiene todo para los tipos matemáticos. Tenemos un colega que cree que esta fórmula es tan hermosa y captura la mayor cantidad esencial de matemáticas que hizo una mesa de café con el resultado en mosaico. Alguna pieza de conversación que es!

Volvamos a otra ecuación diferencial (16) y “trabajemos” juntos y aprendamos aún más.

$$1 \cdot y''(t) + 6 \cdot y'(t) + 10 \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \quad (16)$$

Nuestra conjetura $y(t) = e^{\lambda t}$ nos lleva a (17)

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 6\lambda e^{\lambda t} + 10e^{\lambda t} = 0, \quad (17)$$

de la cual hemos estado factorizando $e^{\lambda t}$ desde ambos lados. Entonces, porque la Sra. Baumgartner nos dijo que si el producto de dos términos, $e^{\lambda t}$ y $\lambda^2 + 6\lambda + 10$ es 0, uno de ellos debe ser 0 y ya que $e^{\lambda t}$ nunca puede ser 0 debemos tener

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0. \quad (18)$$

Llamaremos a (18) la *ecuación característica* de la ecuación diferencial (16) porque sus raíces caracterizarán las soluciones de (16). A menudo, las raíces de la ecuación característica se denominan

valores propios. Si has estado haciendo tu trabajo aquí todo el tiempo, has visto muchas ecuaciones características.

Ahora buscamos las raíces de (18). Sería bueno y lo ha sido en varios casos hasta ahora si este factor cuadrático se factorizara como lo hiciste al principio en el curso de la Sra. Baumgartner, pero este no es así, así que tenemos que usar la ecuación cuadrática que la Sra. Baumgartner nos enseñó luego en ese mismo curso. ¿Comienzas a ver cuán importante es ella en tu vida? Espera, habrá mucho más que hizo por nosotros. ¿Has encontrado la dirección de su escuela para poder escribirle y decirle cómo aprecias todo lo que hizo por ti?

¿Qué nos da la fórmula cuadrática para la solución de (17)? Nos da las dos raíces para (18):

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = -3 \pm i. \quad (19)$$

En nuestro método que has desarrollado para resolver la ecuación diferencial (17) ahora sabemos que hay dos soluciones a partir de las cuales podemos construir una solución general:

$$y_1(t) = e^{(-3+i)t} \quad \text{and} \quad y_2(t) = e^{(-3-i)t}. \quad (20)$$

Sabemos que necesitamos tomar una combinación lineal de estas dos soluciones para formar nuestra solución general:

$$y_{\text{general}}(t) = c_1 e^{(-3+i)t} + c_2 e^{(-3-i)t}. \quad (21)$$

Usando nuestras condiciones iniciales, $y(0) = 2$ y $y'(0) = 0$ produce dos ecuaciones con las incógnitas c_1 y c_2 :

$$\begin{aligned} 2 &= c_1 + c_2 \\ 0 &= (-3+i)c_1 + (-3-i)c_2 \end{aligned}$$

de donde encontramos $c_1 = 1 - 3i$ y $c_2 = 1 + 3i$. Finalmente, entonces tenemos nuestra solución completa en (22):

$$y(t) = (1 - 3i)e^{(-3+i)t} + (1 + 3i)e^{(-3-i)t}. \quad (22)$$

Podemos vivir con esto, de hecho, en *Mathematica* podemos graficar esto (ver Figura 2).

Ahora, si tuviéramos que aplicar la identidad de Euler o **ComplexExpand** de *Mathematica* a (22) nos daríamos cuenta de una solución de aspecto real cuya gráfica sería exactamente la misma que la de la Figura 2:

$$y(t) = 6e^{-3t} \sin(t) + 2e^{-3t} \cos(t). \quad (23)$$

Sin embargo, si aplicamos la identidad de Euler a SOLO UNA de nuestras soluciones desde $y_1(t)$ y $y_2(t)$, podríamos obtener las dos soluciones linealmente independientes, de aspecto real, no complejas, que necesitamos para construir una solución general; ; todo solo a partir de una solución compleja. Veamos cómo es esto posible.

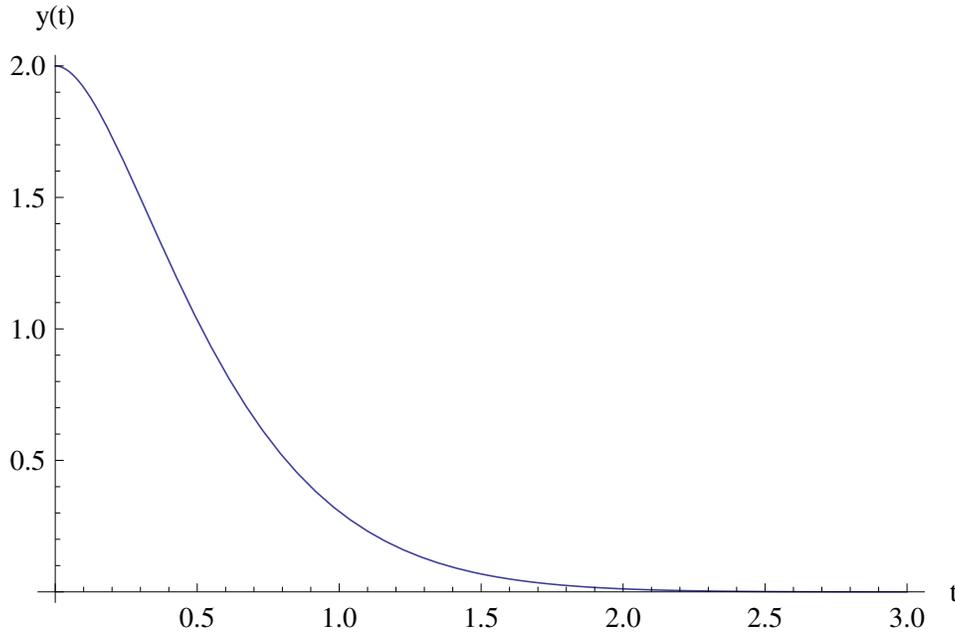


Figura 2. Gráfica de la solución de la ecuación diferencial (16).

$$\begin{aligned}
 (1 - 3i)e^{(3+i)t} &= (1 - 3i)e^{-3t} \cdot e^{it} \\
 &= (1 - 3i)e^{-3t}(\cos(t) + i \sin(t)) \\
 &= 3e^{-3t} \sin(t) + e^{-3t} \cos(t) + i(e^{-3t} \sin(t) - 3e^{-3t} \cos(t))
 \end{aligned} \tag{24}$$

A partir de (24) podemos extraer dos candidatos para la solución:

$$yr_1(t) = 3e^{-3t} \sin(t) + e^{-3t} \cos(t) \quad \text{and} \quad yr_2(t) = e^{-3t} \sin(t) - 3e^{-3t} \cos(t). \tag{25}$$

Simplemente sustituyendo cada una de estas dos soluciones, $yr_1(t)$ y $yr_2(t)$, en la ecuación diferencial (16) podríamos mostrar que cada una de estas dos soluciones, $yr_1(t)$ y $yr_2(t)$, en realidad resuelve la ecuación diferencial (16). Por lo tanto, podemos tomar la parte real y la parte imaginaria (sin los i) de una de nuestras soluciones complejas y formar dos soluciones reales. Recuerda que solo necesitamos encontrar dos soluciones linealmente independientes para construir una solución general y estas siempre harán el truco.

Para completar en nuestro análisis, necesitamos construir nuestra solución general y encontrar los coeficientes c_1 y c_2 en nuestra solución general (26)

$$\begin{aligned}
 y_{\text{general}} &= c_1 \cdot yr_1(t) + c_2 \cdot yr_2(t) \\
 &= c_1 (3e^{-3t} \sin(t) + e^{-3t} \cos(t)) + c_2 (e^{-3t} \sin(t) - 3e^{-3t} \cos(t))
 \end{aligned} \tag{26}$$

Ahora nos quedó un desastre algebraico, pero podemos usar nuestras condiciones iniciales (¡Hmmmmm!) para resolver c_1 y c_2 , teniendo en cuenta que las funciones seno y coseno se evalúan a 0 y 1, respectivamente, para un argumento de 0. Alguien está cuidando nuestra cordura algebraica. Sigamos, pero necesitaremos nuestra derivada de $y_{\text{general}}(t)$ primero:

$$y_{\text{general}}'(t) = 10c_2e^{-3t} \cos(t) - 10c_1e^{-3t} \sin(t)$$

Ahora, finalmente (!), Usamos nuestras condiciones iniciales (¡Hmmmmm!):

$$\begin{aligned} 2 &= y_{\text{general}}(0) = c_1 (3e^{-3 \cdot 0} \sin(0) + e^{-3 \cdot 0} \cos(0)) + c_2 (e^{-3 \cdot 0} \sin(0) - 3e^{-3 \cdot 0} \cos(0)) \\ &= c_1 - 3c_2 \end{aligned} \tag{27}$$

and

$$\begin{aligned} 0 &= y_{\text{general}}'(0) = 10c_2e^{-3 \cdot 0} \cos(0) - 10c_1e^{-3 \cdot 0} \sin(0) \\ &= 10c_2 \end{aligned} \tag{28}$$

Entonces, a partir de nuestras ecuaciones de condiciones iniciales, vemos que $c_1 = 2$ y $c_2 = 0$. Por lo tanto, nuestra solución final es

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \cdot y_{r1}(t) + c_2 r \cdot y_{r2}(t) \\ &= 0 (3e^{-3t} \sin(t) + e^{-3t} \cos(t)) + 2 (e^{-3t} \sin(t) - 3e^{-3t} \cos(t)) \\ &= 2e^{-3t} \sin(t) - 6e^{-3t} \cos(t) = 2e^{-3t} \sin(t) + 6e^{-3t} \cos(t) \end{aligned} \tag{29}$$

La última igualdad porque el coseno es una función par y como tal $-\cos(t) = \cos(t)$. Por lo tanto (29) da el mismo resultado que la ecuación (23). Esto significa que hemos mostrado varias formas de resolver la ecuación diferencial (16). Las revisaremos todas en la próxima actividad.

1) Resuelve la siguiente ecuación diferencial (30)

$$1 \cdot y''(t) + 6 \cdot y'(t) + 109 \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \tag{30}$$

de tres maneras diferentes, (1) usando una solución conjeturada y tratando con toda la aritmética compleja y finalmente aplicando la identidad de Euler para convertir el problema en un problema sin i en él; (2) encuentra la parte real de una de las soluciones, digamos la parte real de $y_1(t)$ o el coeficiente real de la parte imaginaria de $y_1(t)$. Ahora usando estas dos partes solamente, construye una solución general; y (3) usando `DSolve` de *Mathematica* (esta será nuestra forma preferida, no crees). En todos los casos, determine completamente las constantes c_1 y c_2 (serán diferentes en cada uno de (1) y (2)) y grafica TODAS tus soluciones en los mismos ejes para asegurarte de que sean todas iguales.

Una última situación que debemos examinar

Hasta ahora esto es lo que tenemos. Si nuestra ecuación diferencial (10) tiene soluciones conjeturadas $y(t) = e^{\lambda t}$, entonces λ puede tener la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2 \cdot m}. \quad (31)$$

Obtenemos todo esto al resolver la ecuación característica, $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$, asociada con la ecuación diferencial (10). Ahora pueden suceder tres cosas en esta situación y las describimos como tres casos diferentes:

1. $c^2 - 4 \cdot m \cdot k > 0$;
2. $c^2 - 4 \cdot m \cdot k < 0$; ó
3. $c^2 - 4 \cdot m \cdot k = 0$

El término $c^2 - 4 \cdot m \cdot k$ es tan exigente o discriminatorio que lo llamaremos *discriminante* porque discriminará entre los diversos tipos de soluciones de la ecuación diferencial (10).

Ya hemos discutido en detalle los casos (1) y (2). De hecho, en el caso (1) obtenemos raíces reales y nuestra solución simplemente se amortigua a 0, mientras que en el caso (2) obtenemos raíces complejas, lo que nos hace obtener (a través de la identidad de Euler) oscilaciones, en aplicaciones reales, oscilaciones amortiguadas. ¿Qué pasa con el caso (3)?

Cada uno de estos casos se denomina con un nombre especial: el caso (1) se llama *sobreamortiguado*; El caso (2) se llama *subamortiguado*; y el caso (3) se llama *críticamente amortiguado*.

m) Considera estas ecuaciones diferenciales todas del caso (3). Usa el comando `DSolve` de *Mathematica* para resolverlos y luego has algunas inferencias sobre cómo deben ser las dos soluciones para la ecuación diferencial (10) en la situación del caso (3). Indica tu resultado como una regla general para ecuaciones diferenciales del tipo de (10). Si bien hay una teoría para confirmar esto, sin duda coincidiremos con tus conclusiones y seguiremos adelante.

i) $y''(t) + 10y'(t) + 25y(t) = 0, \quad y(0) = 3 \quad \text{and} \quad y'(0) = 0.$

ii) $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0, \quad y(0) = 5 \quad \text{and} \quad y'(0) = 0.$

iii) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0, \quad y(0) = 5 \quad \text{and} \quad y'(0) = 0.$

iv) $2y''(t) + 16y'(t) + 32y(t) = 0, \quad y(0) = 5 \quad \text{and} \quad y'(0) = 0.$

Contabilidad y reordenamientos

En nuestras soluciones para la ecuación diferencial de segundo orden (32),

$$a \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + c \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = y_0 \quad \text{and} \quad y'(0) = 0, \quad (32)$$

que hemos encontrado que es tan útil, el caso donde el discriminante, $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, es negativo da lugar a raíces complejas de la ecuación característica y la solución general se ve (33)

$$\begin{aligned}
y(t) &= Ae^{\left(\frac{-b}{2a}t\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + Be^{\left(\frac{-b}{2a}t\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) \\
&= e^{\left(\frac{-b}{2a}t\right)} \left(A \sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + B \cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) \right)
\end{aligned} \tag{33}$$

Si dejamos que $\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right) = \omega$ (33) se simplifica a (34)

$$y(t) = e^{\left(\frac{-b}{2a}t\right)} (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) . \tag{34}$$

Deseamos combinar los términos seno y coseno en (34) en una función seno con un ángulo de fase. Podemos hacer esto debido a la identidad trigonométrica:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y) ,$$

y el diagrama en la Figura 3. Identificando que $x = \omega t$ y $y = \theta$ y multiplicando y dividiendo cada expresión por $\sqrt{A^2 + B^2}$ podemos convertir la expresión $A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ a

$$\begin{aligned}
&\sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\omega t) \right) \\
&= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos(\theta) \sin(\omega t) + \sin(\theta) \cos(\omega t)) \\
&= \sqrt{A^2 + B^2} (\sin(\omega t + \theta))
\end{aligned} \tag{35}$$

donde $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{B}{A}\right)$ se llama *cambio de fase*.

De (35) podemos escribir nuestra solución (34) como (36)

$$y(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{\left(\frac{-b}{2a}t\right)} \cdot \sin(\omega t + \theta) . \tag{36}$$

El ángulo de fase, θ , nos permite ver la solución como una función de tipo $\sin(\omega t)$, pero desfasada por θ radianes. Más precisamente, podemos escribir

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin\left(\omega \left(t + \frac{\theta}{\omega}\right)\right) , \tag{37}$$

y referirnos a $\frac{\theta}{\omega}$ como el *ángulo de fase*. Los ángulos de fase serán importantes para ingenieros y científicos.

Considera la ecuación diferencial (38)

$$1 \cdot y''(t) + 6 \cdot y'(t) + 25 \cdot y(t) = 0 \quad y(0) = 1 \text{ and } y'(0) = 0 \tag{38}$$

cuya solución es

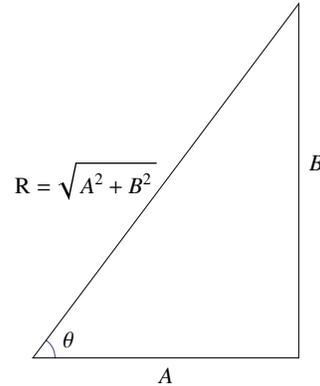


Figura 3. Diagrama de triángulo útil para reorganizar una solución oscilante a una ecuación diferencial de segundo orden que da como resultado una solución desplazada de una sola fase a partir de la suma de los términos seno y coseno en la solución.

$$y_{\text{sol}}(t) = \frac{1}{4}e^{-3t}(3 \sin(4t) + 4 \cos(4t)).$$

mientras que la forma con cambio de fase de la solución es

$$\begin{aligned} y_{\text{sol}}(t) &= \frac{5}{4}e^{-3t} \sin\left(4t + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) \\ &= \frac{5}{4}e^{-3t} \sin\left(4\left(t + \frac{\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)}{4}\right)\right) \\ &= \frac{5}{4}e^{-3t} \sin(4(t + 0,231824)) \end{aligned} \quad (39)$$

En (39) notamos que $\omega = 4$ y $\theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 0,231824$ radianes.

Vemos en la Figura 4 el significado del ángulo de fase geoméricamente.

i) Resuelve la ecuación diferencial (40),

$$1 \cdot y''(t) + 10 \cdot y'(t) + 19 \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 1 \text{ and } y'(0) = 0. \quad (40)$$

ii) Convierte la solución al formato de ángulo de fase y calcula el ángulo de fase θ en radianes.

iii) Grafica ambas soluciones en (i) y (ii) en el mismo eje para confirmar tus análisis. ¿Qué deberías ver?

Actividad 1 - Tres tipos de amortiguamiento

Se sabe que para el líquido y la forma de la masa en una determinada configuración de masa-resorte amortiguado, la ecuación diferencial (41) modela esta situación bastante bien:

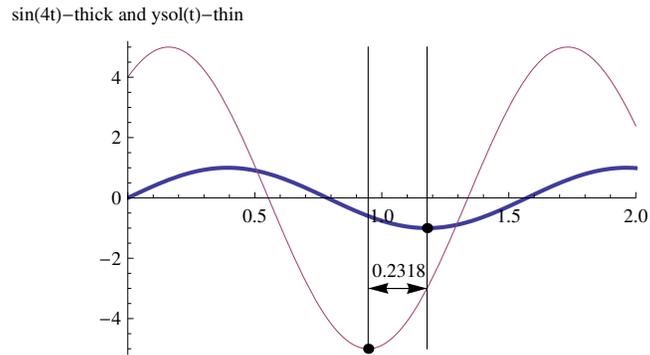


Figura 4. Una gráfica de la porción oscilante (no amortiguada), $3 \sin(4t) + 4 \cos(4t)$, de la solución (delgada) a una ecuación diferencial de segundo orden (36) con su curva de frecuencia simple $\sin(\omega t)$ (gruesa). Observa el ángulo de fase aquí de 0.2318 radianes de valle a valle, ilustrando lo que queremos decir por “fuera de fase por un ángulo de fase de 0.2318 radianes”.

$$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0. \tag{41}$$

donde el coeficiente de resistencia es $c = 7 \text{ N} / (\text{m} / \text{s})$ y la masa es $m = 4 \text{ kg}$.

¿Para qué rango de valores de la constante de resorte N / m será el sistema de masa-resorte?

- i) subamortiguado;
- ii) críticamente amortiguado; o
- iii) sobreamortiguado?
- iv) Elige un valor de cada una de las tres regiones que determines, resuelve la ecuación diferencial correspondiente y grafica tu solución para confirmar tu respuesta.

Actividad 2 - Diseño con primer paso por equilibrio

Considere el sistema de masa-resorte amortiguado descrito por la ecuación diferencial (42)

$$2 \cdot y''(t) + 4 \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \tag{42}$$

- i) ¿Para qué valores de k el sistema descrito en la ecuación diferencial (42)?
- ii) Para varios valores de k en (i) encuentre el tiempo en que la masa tiene un desplazamiento de 0 por primera vez. Para cada valor de k denotaremos a este como *primer tiempo de paso*, $FP(k)$.
- iii) Grafica $FP(k)$ vs. k para $k \in [0, 20]$. ¿Qué está sucediendo para el valor de $k = 0$ para esta función?

- iv) Para propósitos de diseño, puede ser necesario ofrecer un resorte con el valor más bajo de k pero aún así tener un primer tiempo de paso de 0.5 s. Encuentra el k más pequeño para el cual $FP(k) = 0,5$.

Ahora considera el sistema de masa-resorte amortiguado descrito por la ecuación diferencial (43)

$$2 \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + 9,4 \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \quad (43)$$

- v) ¿Para qué valores de c el sistema descrito en la ecuación diferencial (43) será subamortiguado?
- vi) Para varios valores de c en este rango de valores en (i) encuentra el tiempo en que la masa tiene un desplazamiento de 0. Para cada valor de c llama a este *primer tiempo de paso* por punto de equilibrio, $FP(c)$. ¿Qué está sucediendo para el valor de $c = 0$ para esta función?
- vii) Grafica $FP(c)$ vs. c para $c \in [0, 20]$.
- viii) Para propósitos de diseño, puede ser necesario ofrecer un resorte con el valor más bajo de c pero aún así tener un primer tiempo de paso de 0.5 s. Encuentra el c más pequeño para el cual $FP(c) = 0,5$.

¡Aquí hay un resultado bastante interesante que parece implicar que la posición inicial no tiene nada que ver con el tiempo de primer paso cuando todos los demás valores m , c , k , y v_0 son fijos!

- ix) Para el movimiento descrito por la ecuación diferencial (43) demuestre que para un valor dado de c sin importar la posición inicial y_0 dada el primer tiempo de paso $FP(c)$ SIEMPRE es el mismo.
- x) Demuestra también que lo mismo es cierto en el caso del movimiento descrito por la ecuación diferencial (42), es decir, para un valor dado de k sin importar la posición inicial y_0 dado el primer tiempo de paso $FP(k)$ es SIEMPRE el mismo.
- xi) Por cierto, este último resultado *no* se aplica a la velocidad inicial, es decir, el tiempo de primer paso varía a medida que cambiamos $y'(0) = v_0$ si todos los demás parámetros permanecen fijos. Prueba este resultado.
- xii) Este último resultado tampoco es válido para la masa m , es decir, el primer tiempo de paso varía a medida que cambiamos m si todos los demás parámetros permanecen fijos. Demuestra este resultado.

Actividad 3 - Modelado de paracaidismo

Al modelar el descenso de un paracaidista hay dos etapas para el descenso: (1) con la rampa sin abrir, comúnmente conocida como paracaidismo y (2) con la rampa abierta, con suerte conocida como el descenso suave.

Al configurar un diagrama de cuerpo libre de las fuerzas externas en el paracaidista, hay evidencia teórica y de laboratorio para un término de resistencia NO de la forma $c \cdot y'(t)$, sino de la forma

$c \cdot (y'(t))^2$. Por supuesto, todavía existe la fuerza ($m \cdot g$) debido al peso del paracaidista y el equipo, donde m es la masa en kg y g es la aceleración debido a la gravedad, generalmente $9.8 \text{ m} / \text{s}^2$.

- i) Verifica que la ecuación diferencial (44) es un modelo razonable para un paracaidista usando un diagrama de cuerpo libre. Supongamos que medimos la distancia y la velocidad positiva hacia abajo desde la altitud del avión al comienzo del salto. Identifica cada uno de los términos y unidades en (44).

$$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t)^2 = m \cdot g, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (44)$$

- ii) De hecho, las unidades para el coeficiente de resistencia, c , tienen que ser $\frac{kg}{m}$ para que las unidades en $c \cdot (y'(t))^2$ puedan ser en Newtons o $kg \cdot \frac{m}{s^2}$.
- iii) Supongamos que hacemos nuestro primer salto (nuestra masa es de 100 kg) fuera de un avión a una altitud de 3.500 m para un descenso vertical primero sin paracaídas y luego con paracaídas. Somos bastante conservadores y tenemos un poco de miedo de cuánto tiempo queremos caer libremente.

Determina el tamaño de un coeficiente de resistencia apropiado, c , $\frac{kg}{m}$, del cuerpo humano en posición horizontal, tal vez con material suelto agregado en un traje de salto. Es posible que desees buscar en la web dichos datos y luego documentarlos en tu informe. Lo que queremos es que antes de que se abra el paracaídas alcancemos una velocidad terminal de $65 \text{ m} / \text{s}$ (ni demasiado rápido, ni demasiado lento). Deja que el paracaidista caiga unos 2.500 m a una altitud de 1.000 m y, a esa altitud, abra el paracaídas y planeé hacia la tierra. Ahora determina el tamaño del coeficiente de resistencia, c , para un paracaídas abierto para que aterricemos con una velocidad de impacto al suelo de lenta a media de $3.0 \text{ m} / \text{s}$.

- iv) Implementa el modelo de la segunda etapa (usando el paracaídas) y grafica tanto la altitud como la velocidad desde que abrimos el paracaídas hasta el aterrizaje.
- iv) ¿Cuánto duró nuestro salto total del avión al suelo? ¿Cuánto tiempo pasamos en cada una de las dos etapas, caída libre y caída en paracaídas?
- v) ¿Podemos esperar diseñar para estos dos valores de c , el que está en la etapa de caída libre y el que está en la etapa de caída con paracaídas? Si es así, ¿estamos listos para irnos? Si no es así, ¿qué podríamos aconsejarle a nuestro paracaidista para que tenga un buen vuelo y un aterrizaje seguro?

Aquí hay información que debes saber. Una velocidad terminal razonable para un paracaidista que golpea el suelo sería lenta 2.1 m/s , media 3.3 m/s , y rápida 4.6 m/s [5]. La velocidad terminal para un paracaidista es de aproximadamente 53 m/s a 76 m/s [2].

Actividad 4 - Frecuencia Masa-Resorte Amortiguado

Considera un sistema de masa-resorte amortiguado cuyo desplazamiento vertical de la masa unida al resorte viene dado por la ecuación diferencial (45) con desplazamiento de masa $y(t)$ en m,

m en kg, y constante de resorte k en N / m:

$$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0. \quad (45)$$

Primero, supongamos que no hay resistencia, es decir, $c = 0$. Esto significa que estamos examinando la siguiente ecuación diferencial (46):

$$m \cdot y''(t) + k \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0. \quad (46)$$

- i) Para la ecuación diferencial (46) determina su frecuencia de oscilación en Hz (es decir, ciclos por segundo). A partir de la ecuación característica y sus raíces en este caso, debes saber que está subamortiguada y tiene oscilación. Explica por qué.
- iii) Para la ecuación diferencial (45) encuentra criterios sobre los coeficientes m , c y k para que este sistema oscile y se amortigüe. En ese caso, determina su frecuencia de “oscilación” en Hz (es decir, ciclos por segundo). Escribimos “oscilación” porque aunque el sistema está amortiguado, la masa pasará de un máximo a un mínimo y de nuevo a un máximo en un intervalo de tiempo constante, y esto te ayudará a determinar la frecuencia.

Actividad 5 - Decremento logarítmico

Considera el oscilador subamortiguado (discriminante, $c^2 - 4mk < 0$) en la ecuación diferencial (47):

$$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0, \quad (47)$$

- i) Determina la frecuencia del oscilador descrito en (47). Esto se llama *cuasifrecuencia* (μ) en vista del hecho de que el movimiento no es realmente periódico debido a la amortiguación.
- ii) Determina la frecuencia del oscilador descrito en (47), solo que esta vez dejemos que $c = 0$, es decir, tenemos un verdadero oscilador puro. Esto se llama la *frecuencia natural* (ω_0) de este sistema.
- iii) Ahora, la proporción de μ sobre ω_0 nos permitirá ver que el resultado de amortiguar $c > 0$ es reducir la frecuencia natural del sistema. Explica esta afirmación.
- iv) El período del sistema no amortiguado es $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ mientras que el *cuasiperíodo* del sistema amortiguado se puede definir como $T_d = \frac{2\pi}{\mu}$ y, por lo tanto, la relación de T_d a T es otra forma de comparar los dos sistemas, amortiguado con no amortiguado. Encuentra esta relación y verifica que la amortiguación aumenta el cuasiperíodo en comparación con el período.

El logaritmo natural de la disminución definida en (v) a continuación se llama *decremento logarítmico* (Δ) y se puede demostrar que es igual a $\frac{\pi c}{m\mu}$. Como todas las cantidades k , m , μ y T_d pueden medirse y c está incrustado en la expresión para $\Delta = \frac{\pi c}{m\mu}$ entonces podemos usar Δ para determinar c a partir de observaciones.

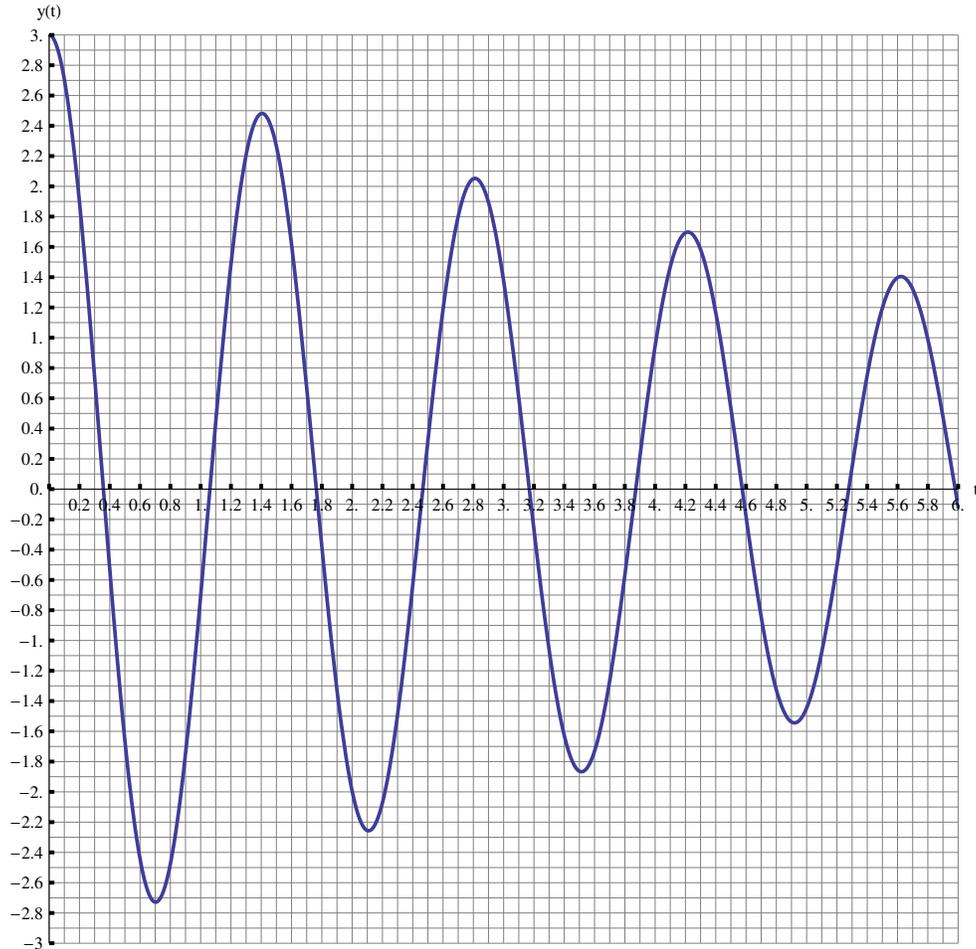


Figura 5. Gráfica de solución a la ecuación diferencial (47) con los siguientes valores de parámetros y condiciones iniciales: $m = 1$ kg, $k = 20$ N/m, $y(0) = 3$ m, y $y'(0) = 0$ m / s en el que buscamos un valor para c .

- v) Podemos mostrar la razón de los desplazamientos de dos máximos sucesivos del movimiento del sistema (llama a esta razón el *decremento* del sistema) en el caso del sistema amortiguado es $e^{\frac{cT_d}{2m}}$. Si puedes determinar este hecho en general, hazlo. De lo contrario, usa este conjunto de parámetros, $m = 4$, $c = 0,1$, $k = 2,5$ con $y_0 = 1$ y $y'(0) = 0$, y demuestra que el decremento de este sistema es 0.905418.
- vi) En la Figura 5 tenemos la salida gráfica de un oscilador subamortiguado gobernado por la ecuación diferencial (47) con los siguientes valores de parámetros y condiciones iniciales: $m = 1$ kg, $k = 20$ N/m, $y(0) = 3$ m y $y'(0) = 0$ m / s. Usa tu enfoque de (v) y la información de (iv) para determinar el parámetro c N / (m / s). Una vez que hayas determinado c , resuelve tu modelo de ecuación diferencial (47) usando ese valor y compara tu solución con los datos a través de un diagrama de tu solución. ¿Qué tan bien puedes estimar c ? Nota: En la Actividad

9 - Problemas inversos, intentaremos determinar c de otra manera.

Actividad 6 - Fuerza de Flotabilidad

El Principio de Arquímedes sobre la flotabilidad dice que si se coloca un objeto o porción de un objeto en un líquido, existe una fuerza hacia arriba sobre el objeto igual al peso del líquido desplazado. Se sabe que la densidad de masa del agua a 20°C es 992 kg/m^3 y la aceleración debida a la gravedad es $9,8\text{ m/s}^2$. Considera un cilindro circular recto de radio $r = 2\text{ m}$ y longitud $L = 5\text{ m}$ que está sumergido en agua con su base circular plana a unos 4 m debajo de la superficie. La mayoría de nosotros lo sabemos intuitivamente si alguna vez hemos tratado de poner una pelota de playa bajo el agua en la piscina de verano, es fácil ponerla de alguna manera, pero es difícil sumergirla por completo.

- Calcula la fuerza vertical sobre el cilindro debido al Principio de Arquímedes en el caso anterior.
- Calcula la fuerza vertical sobre el cilindro debido al Principio de Arquímedes si el cilindro está sumergido en agua con su base circular plana a unos $s\text{ m}$ debajo de la superficie.

Nos gustaría modelar el movimiento de una boya hecha de secoya americana en forma de cilindro circular recto. La densidad de masa de la secoya es de 450 kg/m^3 [4] y el cilindro tiene dimensiones de radio $r = 2$ y longitud $L = 5\text{ m}$. Supondremos que el cilindro permanece en la configuración de su base circular plana hacia abajo y paralela a la superficie del agua, es decir, sin inclinación.

El cilindro flotará a una profundidad de equilibrio, dEq m, medido desde la parte inferior del cilindro, cuando la fuerza hacia arriba debida al Principio de Arquímedes y la fuerza debida al peso del objeto son iguales (y opuestas) entre sí.

- Muestra que se puede encontrar la profundidad de equilibrio, dEq , cuando la fuerza hacia arriba debida al Principio de Arquímedes y la fuerza debida al peso del objeto son iguales (y opuestas) entre sí. Haz esto justificando y luego resolviendo (48), donde h es la profundidad del cilindro en el agua. Muestra cómo se construye la ecuación primero y luego resuélvela para la profundidad $h = dEq$, la profundidad de equilibrio. Llama a la altura en el cilindro de la profundidad de equilibrio el *punto o nivel de equilibrio*.

$$\pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \rho_{\text{Mass Density Water}} \cdot g = \pi \cdot r^2 \cdot L \cdot \rho_{\text{Mass Density Redwood}} \cdot g \quad (48)$$

- Sea $x(t)$ la altura a la cual el punto de equilibrio (recuerda que el punto de equilibrio es dEq m, medido desde el fondo del cilindro) está por encima del nivel del agua. Te sugerimos que dibujes un diagrama en este punto para realizar un seguimiento de “¿Quién está primero? z” ¿Qué está de segundo!” Por cierto, si necesitas un descanso de estudio, te sugerimos que visites un sitio web que presenta a los grandes comediantes Abbot y Costello. rutina [1], “¿Quién está primero, qué está segundo!”

¿De nuevo en camino ahora? Entonces construyamos una ecuación diferencial para la altura del punto de equilibrio por encima y por debajo del agua a medida que la boya se balancea

verticalmente. (Presumiremos, una vez más, que la boya permanece vertical y no se inclina, ¡ese es un problema más difícil!)

Recordemos la segunda ley de Newton que dice

$$m \cdot x''(t) = \sum_{i=1}^n (\text{Fuerza Externa})_i = \underline{\hspace{10cm}}$$

donde m es la masa en kg de la boya y $x(t)$ es la altura en m del punto de equilibrio por encima del nivel del agua. Como convención, midamos $x(t) > 0$ cuando el equilibrio es más alto que el nivel del agua y $x(t) < 0$ cuando el equilibrio está por debajo del nivel del agua. Entonces $x'(t) > 0$ significa que la boya se mueve hacia arriba, mientras que $x'(t) < 0$ significa que la boya se mueve hacia abajo.

Necesitamos encontrar estas fuerzas externas. A primera vista, estos serán (1) la fuerza de flotación debido al Principio de Arquímedes en el que el cilindro tiene $dEq - x(t)$ m de profundidad en el agua, el punto de equilibrio dEq ha aumentado $x(t)$ fuera del agua y (2) el peso del cilindro. Use (1) y (2) para construir una ecuación diferencial más desarrollada que la que se ofrece en (49).

- e) Resuelve tu ecuación diferencial integrada en (d) y traza tu solución durante el intervalo de tiempo $t \in [0, 50]$ s. Describe lo que sucede física y matemáticamente tan completamente como puedas.
- f) Ahora hay algo poco realista sobre tu trama en (e). Si aún no lo has comentado en tu respuesta a (e), hazlo aquí. Tendremos que hacer un mejor modelo para deshacernos de este problema. Para hacer esto, tendremos que introducir algunos términos de resistencia para que el sistema pierda energía y no se balancee para siempre a la misma altura.

Habrán dos tipos de resistencia que queremos considerar (1) resistencia debido a que la parte inferior del cilindro se sumerge en el agua a medida que el cilindro se adentra en el líquido (no se “sumerge” en el líquido a medida que el cilindro se eleva) y (2) resistencia debido a los bordes ásperos de la superficie vertical del cilindro “rozando” en el agua.

Intenta modelar ambas fuerzas y pon constantes de proporcionalidad en su lugar (ya que no tenemos datos sobre el movimiento de una boya aquí) para cada forma de resistencia (1) y (2). Sugerencia: Necesitamos hacer un seguimiento de en qué dirección se aplicará la resistencia y para eso es posible que necesitemos saber dónde estamos, es decir, $x(t)$, y qué tan rápido nos estamos moviendo y en qué dirección, es decir, $x'(t)$. Dado que tendremos cambios en el signo, es posible que desees utilizar la función **Sign** de *Mathematica*, por ejemplo, `Sign[x'[t]]` te indicará el signo, ya sea +1, 0 o -1, de la velocidad y, por lo tanto, la cantidad $(1 - \text{Sign}[x'[t]])/2$ será 1 si $x'(t) < 0$ y 0 si $x'(t) > 0$. Esto podría ayudarte en el modelado (2).

- g) Grafica tu solución en (f) durante el intervalo de tiempo $t \in [0, 50]$ s y compárala con tu modelado sin resistencia de (e). Explica lo que ves y cuáles son las diferencias. ¿Esto tiene sentido? Es posible que tengas que ajustar tus constantes de proporcionalidad para cada término

debido a (1) y (2) anteriores. Asegúrate de llevar tu modelo a los extremos, por ejemplo, considera madera de balsa, madera de teca o rangos de sus parámetros debido a (1) y (2). Escribe tus conclusiones.

Aquí hay un código de *Mathematica* que te permitirá animar tu tanque cilíndrico en todas las situaciones, Aquí `xsR[t]` es la solución de tu modelo de ecuación diferencial.

```
plane = Plot3D[0, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, Mesh -> False]

cy[t_] := Graphics3D[
  Cylinder[{{0, 0, xsR[t] - dEq}, {0, 0, xsR[t] + L - dEq}}, 2]]

Animate[Show[{plane, cy[t]},
  PlotRange -> {{-3, 3}, {-3, 3}, {-10, 10}},
  Axes -> True, AxesLabel -> {"", "", "height"}, Boxed -> False,
  ViewPoint -> {0, 1, 0}, ImageSize -> 800], {t, 0, 100, .01}]
```

Aquí `plane` es el plano de la superficie del agua y `cy[t_]` es el objeto gráfico de un cilindro de altura L cuya base está a la altura `xsR[t] - dEq` y cuya parte superior está a la altura `xsR[t] - dEq+L`.

Actividad 7 - Malas noticias si es Número Real Positivo en la Función Exponencial

Considera el caso general para el dispositivo de masa-resorte amortiguado con masa $m (> 0)$ kg, coeficiente de resistencia $c (> 0)$ N/(m/s), constante de resorte $k (> 0)$ N/m, posición inicial $y(0) = y_0$ m, y velocidad inicial $y'(0) = v_0$ m/s.

$$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0. \quad (49)$$

Explica por qué, en nuestra solución para $y(t)$, nunca habrá funciones exponenciales con parte real positiva. ¿Por qué es bueno y qué dirías sobre un modelo de este tipo si tuviera funciones exponenciales con una parte real positiva en la solución?

Actividad 8 - Modelado de Empuje de Cohetes

Supongamos que tenemos un pequeño cohete con un tanque de combustible lleno de 100 litros. El combustible (con una densidad de masa de 0,98 kg/l) se quema a una velocidad constante de 3 litros por segundo y puede proporcionar una fuerza de empuje constante de 5900 Newtons a medida que se quema. El cohete y el tanque de combustible tienen una masa de 400 kg sin combustible. El diseño de la forma del cohete causa una resistencia proporcional a su velocidad durante el vuelo de $2v(t)$ donde $v(t)$ está en m/s y la constante 2 es la resistencia y es realmente 2 N/(m/s). Apuntamos el cohete hacia arriba y lo lanzamos ... 5 ... 4 ... 3 ... 2 ... 1 ... Lanzamiento ... ¡Hemos despegado!

- i) ¿Cuánto tiempo arderá el cohete y, por lo tanto, proporcionará empuje? Llamamos a este intervalo de tiempo el *período de quemado*.

- ii) Construye un modelo de ecuación diferencial basado en todas las fuerzas externas y las segundas leyes de Newton.
 Aquí hay algunos asuntos a considerar. Construye un diagrama de cuerpo libre, muy importante. ¿Cuáles son las condiciones iniciales razonables? La masa $m(t)$ ahora es una función del tiempo; ¿Cuál es esa función? Hay una fuerza constante externa debido al empuje durante la quemadura y al peso del cohete.
- iii) Resuelve la ecuación diferencial de (ii) (probablemente sea mejor usar el comando `NDSolve` de *Mathematica* y traza la altitud del cohete durante el período de combustión. También grafica la velocidad durante el período de quemado.
- iv) Determina la altura y velocidad máximas de este cohete.
- v) ¿Modela qué le sucede al cohete después del período de quemado? grafica la altitud del cohete durante el período de caída libre. Traza también la velocidad durante el período de caída libre.
- vi) ¿Cuánto tiempo antes de que golpee la tierra? Es decir, ¿cuánto dura el vuelo total? Podemos suponer que este es un vuelo vertical solamente.
- vii) ¿Con qué velocidad golpea el suelo? ¡Ay!

En el modelo anterior nos hemos alejado de las ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes. Además, hemos introducido fuerzas externas importantes adicionales (empuje y peso) al modelo del cohete. Estas fuerzas convertirán nuestra ecuación diferencial en lo que se llama ecuación diferencial *no homogénea*. Veremos más de estos. ¡Además, no hay un término constante de resorte aquí ya que el cohete no está en una correa de ningún tipo!

Actividad 9 - Problema Inverso

Este es un ejemplo de un *problema inverso* en el que se nos dan datos y buscamos estimar un parámetro en el modelo para ajustar estos datos con un modelo.

Supongamos que tenemos observaciones (Tabla 1) en la posición, $y(t)$, en cm, frente al tiempo t en s de un pequeño resorte en un amortiguador. Sabemos que la masa es $m = 1$ g y la constante de resorte es $k = 20$ dina/cm. Podemos medir eso.

t s	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y(t)$ cm	2.16	1.77	1.40	1.08	0.71	0.39	0.18	0.03	-0.06	- 0.01	-0.10

Tabla 1. Datos sobre el desplazamiento de una masa en el extremo de un resorte.

$$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \tag{50}$$

Buscamos encontrar el coeficiente de resistencia c en dina/(m/s) donde estos parámetros están en una ecuación diferencial (50)

Discute cómo determinarías c . Ofrece varias ideas. Lleva a cabo un enfoque al menos. Confirma tu estimación de c de alguna manera. Si has ofrecido varios enfoques, compara tus resultados. ¿Cómo se compara tu modelo con su valor de c con los datos?

Actividad 10: Manteniendo Bajos los Costos

La rigidez en un resorte (es decir, el valor de la constante de restauración k N/m) cuesta dinero. Cuanto mayor es la rigidez, más costoso es el resorte. Supongamos un costo, en dólares, para un resorte de 0.2 m de longitud de $\text{Cost}(k) = 13,70 + ,01k^2$.

Ahora supongamos que estamos diseñando el siguiente sistema de masa-resorte amortiguado:

$$1,2 \cdot y''(t) + 46,4 \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \quad (51)$$

- i) Encuentra los valores de k que hacen que el sistema esté sobreamortiguado. Has lo mismo para críticamente amortiguado.
- ii) Supongamos que, en el caso de la configuración sobreamortiguada, deseamos acercar la masa a 0.1 m del equilibrio estático en los primeros 0.5 s de movimiento. ¿Qué valor de k usaríamos para hacer esto? ¿Cuánto nos costaría este resorte?

Por cierto, los ingenieros que trabajan para fabricantes de automóviles de lujo están MUY interesados en reducir las oscilaciones en los vehículos que diseñan lo más rápido posible para la comodidad de lujo. Los dispositivos en los automóviles que hacen esto se llaman *amortiguadores* y son esencialmente un tablero de instrumentos de resorte. Piensa en el viaje cuando viajas en el destartalado VW de 13 años de tu amigo en comparación con el nuevo Cadillac de tu tío Jack.

- iii) ¿Qué tipo de rendimiento de resorte podemos obtener si estamos dispuestos a gastar \$600 en el resorte?
- iv) Se conjetura que para una reducción de $x\%$ en la tolerancia, es decir, $x\%$ menor que 0.1 m cerca del equilibrio estático, hay un aumento de $x\%$ en el precio. Esto significa que cuando $x = 80$ estamos comparando los costos de un resorte que nos llevará dentro de 0.1 m del equilibrio estático en 0.5 s a un resorte que nos llevará dentro de $,8 * ,1 = ,08$ m del equilibrio estático en 0.5 s. Prueba o refuta esta conjetura.

Referencias

- [1] Abbott, Bud and Lou Costello. 2010. Who's on first, what's on second. <http://www.youtube.com/watch?v=wfmvk05x6Ng>. Accessed 27 May 2010.
- [2] Elert, Glenn. 2010. Speed of a Skydiver (Terminal Velocity). <http://hypertextbook.com/facts/JianHuang.shtml>. Accessed 23 May 2010.
- [3] Hooke's Law. 2010. <http://www.websters-online-dictionary.org/Ho/Hooke%2527s+law.html>. Accessed 17 May 2010.

- [4] SImetric.co./uk. 2010. Weights of various woods. http://www.simetric.co.uk/si_wood.htm. Accessed 27 May 2010.
- [5] Whitting J. W., J. R. Steele. M. A. Jaffrey, and B. J. Munro. 2007. Parachute landing fall characteristics at three realistic vertical descent velocities. *Aviat Space Environ Med.* 78(12): 1135-1142. Referenced at <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18064918>. Accessed on 23 May 2010.