www.simiode.org
SIMIODE
A SYSTEMIC INITIATIVE FOR MODELING INVESTIGATIONS
& OPPORTUNITIES WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

STUDENT VERSION
WATER FLOWING FROM TANK

Brian Winkel
Director de SIMIODE
Cornwall NY USA

Traducido por Migdonio González
Universidad Tecnológica de Panamá
Ciudad de Panamá, Panamá

ENUNCIADO

En la Figura 1 vemos una captura de pantalla de un video de un experimento [1] para mostrar y medir la altura (cm) de una columna de agua en un cilindro graduado en el tiempo (s) cuando hay un pequeño agujero en la parte inferior del cilindro a través del cual sale el agua. El tiempo transcurrido es de 29 s mientras que el nivel del agua es de 17.5 cm. La tabla 1 muestra datos de la misma ejecución del experimento en el que la columna de agua tenía 35 cm de altura originalmente, es decir, cuando $t = 0$.

Finalmente, ofrecemos una gráfica (Figura 2) de la data en la Tabla 1.

(1) Forma un modelo matemático para la altura del agua en la columna de la Tabla 1 y compáralo con tus datos. ¿Qué tan bueno es tu modelo? Tu física? ¿Qué medida usarás?

Derivación del Modelo a partir de los Primeros Principios

Examinamos un modelo basado en los primeros principios, no solo en el ajuste empírico. Dada una columna de agua en un cilindro con un pequeño agujero en la parte inferior del cilindro a través del cual sale el agua, ¿cuánto tiempo lleva vaciar el cilindro hasta el nivel del agujero? Más específicamente, si se nos da el área de la sección transversal del cilindro en función de la altura y

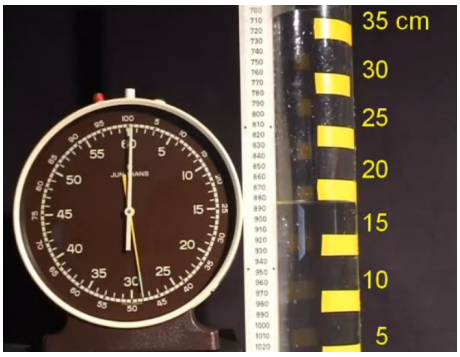

Figura 1. Captura de pantalla [1] de un video de un experimento para mostrar y medir la altura (cm) de una columna de agua en un cilindro graduado en tiempo (s) cuando hay un pequeño orificio en la parte inferior del cilindro a través del cual el agua sale.

Tiempo (s)	Altura (cm)
0	35
8	30
16	25
25	20
35.5	15
48.7	10
66.8	5

Tabla 1. Datos de tiempo vs. altura para el experimento de la columna de agua (cuarta corrida) de [1].

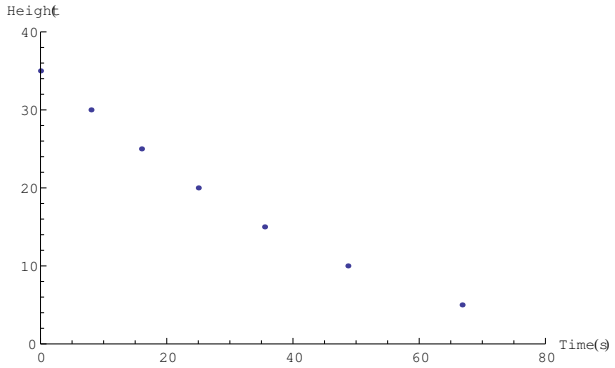

Figura 2. Gráfica de la data en la Tabla 1.

el área del pequeño orificio en la parte inferior del cilindro, podemos modelar el flujo de salida del agua del cilindro.

Repasemos algunos antecedentes básicos de física. Primero consideramos una ley de física que nos puede ayudar. La Ley de Conservación de la Energía dice que la suma de la energía potencial y la energía cinética de una partícula de masa m es constante, es decir, se conserva la energía total. Entonces, si consideramos una partícula de agua de masa m inicialmente sobre un cilindro de agua, unos h metros por encima de una pequeña abertura de bordes afilados en la pared lateral del cilindro a través de la cual el agua puede salir del cilindro, esta masa de agua tiene energía potencial inicial $PE_i = m \cdot g \cdot h$, donde g es la aceleración debida a la gravedad, y la energía cinética inicial $\frac{1}{2}mv_i^2$ (KE_i), donde v_i es la velocidad inicial de la masa. Por lo tanto, tenemos una energía total inicial de TE_i cuando la masa de agua está en la parte superior del cilindro de agua:

$$TE_i = KE_i + PE_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh\,.$$

Cuando esta masa de agua alcanza la abertura, tiene una altura de 0 metros sobre la abertura y una velocidad final de v_f. Por lo tanto, la energía total en el instante final (TE_f) que la masa alcanza la apertura es

$$TE_f = KE_f + PE_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}mv_f^2\,.$$

Ahora, por la Ley de Conservación de Energía sabemos que $TE_i = TE_f$ y por lo tanto tenemos

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2\,,$$

que cuando uno despeja v_f produce $v_f = \sqrt{2gh + v_i^2}$. En particular, si nuestro elemento de masa de agua estaba en reposo inicialmente, es decir, $v_i = 0$, tenemos la clásica Ley de Torricelli.

$$v_f = \sqrt{2gh}\,,$$

donde v_f es la velocidad del elemento de masa de agua cuando sale de la abertura en el cilindro.

En particular, podemos usar esta velocidad de un elemento de agua en la parte inferior del cilindro dada la altura de la columna de agua en el cilindro, h, para hacer una contabilidad en el cambio del volumen de la columna de agua en el tanque en el tiempo t y, por lo tanto, la altura de la columna de agua, $h(t)$, en el tanque en el tiempo t. Igualamos dos formas de calcular el cambio en el volumen de agua en el tanque al tiempo t.

$$A(t)h'(t) \tag{1}$$

donde $A(h(t))$ es el área de la sección transversal de la columna a la altura $h(t)$, a menudo constante, entonces $A = A(h(t))$ en nuestro caso, y

$$v_f \cdot a \cdot \alpha = \sqrt{2gh} \cdot a \cdot \alpha \tag{2}$$

donde v_f es la velocidad del agua que sale de la columna de agua cuando el agua está a la altura $h(t)$, a es la sección transversal del pequeño orificio a través del cual sale el agua, y α es un número empírico que indica el porcentaje del caudal máximo que realmente atraviesa el orificio pequeño, la reducción debida a la fricción y la constricción en el orificio pequeño. α, se llama *descarga o coeficiente de contracción*.

Ahora igualando (1) y (2) da lugar a una versión funcional de la Ley de Torricelli para la altura de una columna de agua de sección transversal constante, $h(t)$, en tiempo t:

$$A(h(t)) \cdot h'(t) = -a\alpha\sqrt{2gh(t)}\,, \tag{3}$$

donde $h(t)$ es la altura de la columna de agua en el tiempo t. Observa el signo negativo en el lado derecho de (3) cuando el agua sale de la columna de agua.

Si despejamos $h'(t)$ y observamos que $A(h(t)) = A$, combinando todas las constantes excepto g en una gran constante, b, tenemos

$$h'(t) = -b\sqrt{gh(t)} \tag{4}$$

(2) Resuelva (4) para $h(t)$ si conocemos la altura inicial de la columna de agua, es decir, $h(0) = h_0$ y suponemos que el área de la sección transversal de la columna de agua en altura h es constante.

Modelando el flujo de salida de un cilindro de agua

Supongamos que tenemos un cilindro de altura 0,20 m y radio 0,05 m y está lleno de agua. Hay una abertura en el costado del cilindro en la parte inferior del cilindro en forma de un círculo afilado de radio $r = 0{,}01$ m.

Empíricamente, se sabe que si bien el área de la abertura es $\pi r^2 = \pi(,01)^2$ m^2, el área efectiva para el flujo de fluido a través de la abertura es solo una fracción del área . Esa fracción, α, se llama *descarga o coeficiente de contracción*. Supongamos que $\alpha = 0{,}7$, que es un valor razonable de la literatura para varias formas y tamaños de apertura.

Ahora construimos una ecuación diferencial para determinar la altura del agua en el cilindro en función del tiempo, $h(t)$ en metros, en este caso. Para hacer esto, necesitamos usar la contabilidad!!. Esto demostrará ser una buena manera de construir modelos, es decir, calcular cierta cantidad de dos maneras diferentes e igualar los dos cálculos diferentes entre sí. Si los cálculos involucran derivadas, ¡hemos construido una ecuación diferencial!

Entonces, calculemos, de dos maneras diferentes, la tasa a la que cambia el volumen de agua en el momento t. Haremos esto para un área de sección transversal general de nuestro cilindro en función de la altura, $A(h(t))$.

(L) En el tiempo t, un pequeño elemento de altura cambió, $h'(t)$, sobre un área de sección transversal $A(h(t))$. Por lo tanto, habremos perdido

$$A(h(t)) \cdot h'(t) \tag{5}$$

volumen de agua. En nuestro caso, para nuestro cilindro circular de radio constante 0.05 m, tenemos el siguiente cálculo:

$$A(h(t)) \cdot h'(t) = \pi(,05)^2 h'(t) \tag{6}$$

(R) Dado que el agua está saliendo de la abertura con una velocidad (de acuerdo con la Ley de Torricelli) de $\sqrt{2gh(t)}$ m / s y el área de la sección transversal de nuestra abertura es $a = \pi r^2 = \pi(,01)^2$ m^2 entonces estamos perdiendo agua a una tasa de

$$\alpha a\sqrt{2gh(t)} = \alpha\pi r^2\sqrt{2gh(t)} = ,7\pi(,01)^2\sqrt{2gh(t)} \quad \text{m}^3/\text{s}\,, \tag{7}$$

donde recordamos que el área efectiva para el flujo de fluido a través de la abertura es solo una fracción ($\alpha = ,7$) del área.

Ahora, si equiparamos los cálculos para la pérdida de agua encontrada en (5) con la calculada en (7) obtenemos la siguiente ecuación diferencial (sumando nuestra altura inicial $h(0) = h_0 = 0{,}20$ m como condición inicial):

$$A(h(t)) \cdot h'(t) = \alpha\, a\sqrt{2gh(t)}\,, \quad h(0) = h_0 \tag{8}$$

en general, y en nuestro caso, usando $g = 9{,}8$ m/s^2,

$$\pi(,05)^2 h'(t) = ,7\pi(,01)^2\sqrt{2(9{,}8)h(t)}\,, \quad h(0) = 0{,}20\,. \tag{9}$$

Notamos que podríamos recopilar todas las constantes en (9) en la constante b dentro del signo de raíz cuadrada y escribir:

$$h'(t) = -b\sqrt{g \cdot h(t)}\,. \tag{10}$$

Aquí $b = \dfrac{,7\pi(,01)^2}{\pi(,05)^2}\sqrt{2} = 0{,}039598$.

(3) Resuelva la ecuación diferencial (10) (asegúrate de elegir la rama correcta de la solución) y determina cuánto tiempo lleva vaciar el cilindro de agua. Grafica la altura $h(t)$ en función del tiempo, t, durante la duración del drenado.

(4) Supongamos que $\alpha = 0{,}6$ en lugar de 0,7, ¿cuánto tiempo llevaría vaciar el cilindro de agua? Grafica la altura $h(t)$ en función del tiempo, t, durante la duración del drenado. Compara esta respuesta y la gráfica con las de (a). Explica por qué esto es razonable?

(5) Continuando con (3), determina la velocidad de la superficie del agua y grafícala durante la duración del drenado. Explica por qué lo que ves es razonable.

Ahora juguemos algunos juegos de "qué pasaría si" con nuestro modelo.

(6) Varía el radio de la *apertura*, r, y determina el tiempo $T(r)$ en el que $h(T(r)) = 0$ para cada r, es decir, el tiempo $T(r)$ para vaciar el tanque en función de r. Grafica $T(r)$ y comenta sobre su razonabilidad. Usa $\alpha = 0{,}7$ y los mismos parámetros que en la discusión anterior.

Tiempo (s)	Altura (cm)
0	35
8	30
16	25
25	20
35.5	15
48.7	10
66.8	5

Tabla 2. Datos de tiempo vs. altura para el experimento de la columna de agua (FourthTrial) de [1].

(7) Varía el radio del *cilindro*, r, en (3) y determina el tiempo $TT(r)$ en el que $h(TT(r)) = 0$ para cada r, es decir, el tiempo $TT(r)$ para vaciar el tanque en función de r. Grafica $TT(r)$ y comenta sobre su razonabilidad. Usa $\alpha = 0{,}7$ y los mismos parámetros que en (3) arriba.

(8) Supongamos que el tanque de agua tenía la forma de un cono truncado recto, es decir, cambiamos el radio de la base circular inferior, lo llamamos s, fuera (o adentro) del radio original. Nuevamente tenemos un cilindro de agua de altura $h_0 = 0{,}2$ m, un radio de 0,05 m en la parte superior del cilindro, una abertura de radio 0,01 m en la parte inferior del cilindro, pero la base del cilindro ahora es un círculo con radio s m. Usa $\alpha = 0{,}7$ aquí, también. Recopila algunos datos sobre cuánto tiempo lleva vaciar el cilindro para valores de s en la región $s \in [0, 0{,}2]$, digamos, e intenta crear una función que modele el tiempo que toma drenar el cilindro en función del radio inferior, s. NB: Si $s = 0{,}2$ ya hemos hecho este análisis, ya que este es el caso del área de sección transversal constante. Explica por qué tu función obtenida ofrece una relación razonable. Por cierto, si $s = 0$ tenemos un cono invertido.

Dos fuentes de Datos para la Confirmación del Modelo

Uno podría recolectar datos con un modesto aparato conformado por un cilindro graduado con un pequeño orificio cerca de la parte inferior y un reloj, todo en el cuadro de video a la vez para ver la altura y la hora al mismo tiempo. Sin embargo, vamos a varias fuentes en la web para videos y recolectamos datos.

Una fuente de datos es de los experimentos de física de la Universidad de Alicante [1]. En la marca 3:41 del video 10:58 hay una cuarta serie de recopilación de datos de agua que sale de un cilindro graduado de sección transversal circular constante con radio 1.68 cm. La altura inicial del líquido en el tubo es $h = 35$ cm.

(9) Aquí están los datos que recopilamos de nuestra primera fuente de video [1]. ¿Cómo se compara con el tuyo? ¿Qué tan bien puedes modelar este conjunto de datos? Ofrece un análisis para determinar los parámetros de su modelo. Compara datos con el modelo.

Una segunda fuente de datos es el video [4]. Aquí, vemos cuatro ensayos de recopilación de

Tiempo (s)	Altura (cm)
0	13
.58	12
1.35	11
1.95	10
2.85	9
3.65	8
4.55	7
5.55	6
6.55	5
7.55	4
8.55	3
10.45	2
13.45	1

Tabla 3. Datos de tiempo vs. altura para el experimento de la columna de agua (FourthTrial) de [4].

datos del agua saliendo de un cilindro graduado de sección transversal circular constante. Los datos provienen del Cuarto Ensayo que comienza a las 5:34 del video 7:23 [4]. También podemos obtener el radio a las 9:34 en un segundo video [5]. Hay una imagen que nos permite estimar el diámetro del cilindro como 19 cm o un radio de 9,5 cm.

(10) En la Tabla 3 están los datos que recopilamos de nuestra segunda fuente [4]. ¿Cómo se compara con el tuyo? ¿Qué datos obtuviste de la primera, segunda y tercera prueba? ¿Qué tan bien puedes modelar cada conjunto de datos? Ofrece un análisis para determinar los parámetros de uno de los modelos anteriores. Compara datos con el modelo.

Preguntas Adicionales a Considerar

Aquí hay algunas preguntas adicionales de [3].

(11) Supongamos que tenemos un tanque cilíndrico con el área del pequeño agujero en la parte inferior siendo a y el área de la sección transversal del cilindro es A.

a) ¿Cuánto tiempo toma vaciar el tanque?

Para cada uno de los siguientes cambios físicos en el tanque, describe el efecto sobre el tiempo que lleva vaciar el tanque.

b) Duplica el área, a, del pequeño orificio en la parte inferior del cilindro.

c) Cambia g considerando que el tanque esté en la Luna. Allí la gravedad es una sexta parte de la de la Tierra.

Construyendo un Reloj de Agua

(12) Diseña un cilindro de área transversal $A(h)$ a la altura h para que el agua caiga a una velocidad constante. De esta manera, podríamos mostrar intervalos iguales, digamos un cuarto de hora, como distancias verticales iguales, marcando el tiempo a medida que pasa. Para modelar una tasa constante de caída para la altura, $h(t)$, de agua, necesitamos establecer $h'(t) = c$ para alguna constante que deseemos, por ejemplo, 1 centímetro por 15 minutos. Este cilindro-reloj podría marcarse a alturas verticales de 1 cm con el conocimiento de que por cada centímetro que el agua cae han pasado 15 minutos.

Entonces, ¿qué forma debemos elegir? a saber, ¿cuál es el área de la sección transversal a la altura h, es decir, $A(h)$, que en realidad nos da una altura en constante disminución en nuestro nivel de agua?

Cuando termines, puedes ir directamente a tu tienda de impresoras 3D y hacer tu propio reloj de agua.

Fuentes de video para la recolección de datos

Resumimos nuestras fuentes de datos.

Usamos dos videos de columnas de agua cayendo, sin información respecto al radio de la abertura en la parte inferior del cilindro. Estos eran de YouTube y los citamos correctamente a continuación. Estos se mencionan en la Actividad 13.

También construimos un aparato experimental para recopilar datos usando un reloj digital gratuito en una computadora (`www.on-line-stopwatch.com`) que mide y muestra muy bien, en un tamaño de fuente grande y legible, en tiempo real a la milésima de segundo, un contenedor de plástico transparente de agua con gas, un recipiente de recolección para el agua que sale y un iPad para producir videos de los experimentos. Lo hicimos para agujeros pequeños en la parte inferior del cilindro de diámetros 13/16 ", 9/64 ", 11/64 " y 7/64 ". En el último caso, utilizamos dos conjuntos de datos: muestreo de toda la ejecución y luego muestreo de una sección más pequeña de la ejecución. Colocamos los siguientes videos para su uso en esta sección para este escenario 1-15-Torricelli en YouTube. Estos se mencionan en la Actividad 14.

Fuente 1:

Nombre: Ley de Torricelli Vaciado de un depósito

URL: `http://www.youtube.com/watch?v=6LOgdOfFAbI`

Fuente 2:

Nombre: Numec project Sem1 2011 THE Massooraahs!

URL: `http://www.youtube.com/watch?v=44fZdi7QC8E`

Las fuentes 3 a 6 están disponibles en YouTube y en `https://www.simiode.org/resources/488`.

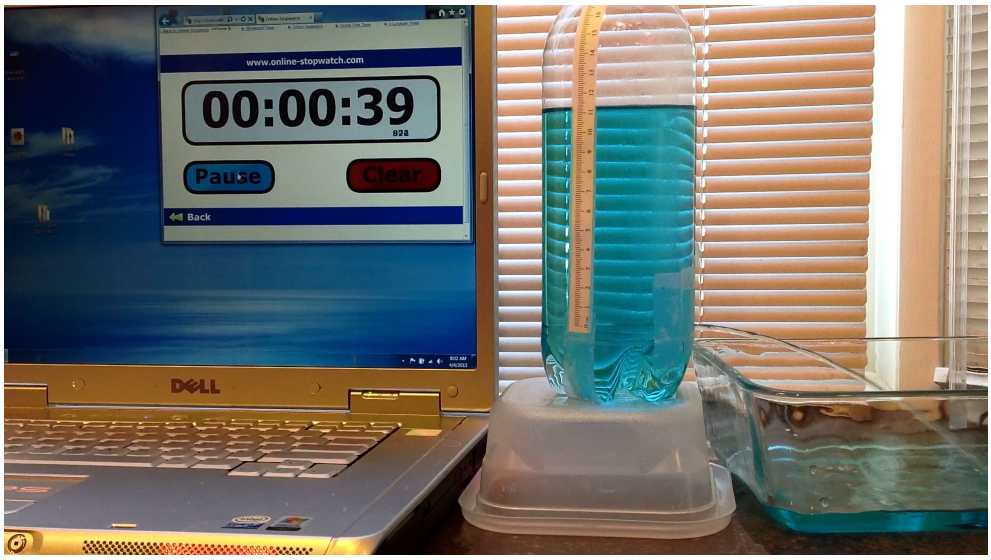

Figura 3. Aparato experimental para recopilar datos sobre el agua que fluye de la columna cilíndrica de agua. De izquierda a derecha vemos una computadora portátil con `www.online-stopwatch.com` funcionando para obtener el tiempo hasta la milésima de segundo más cercana, cilindro circular de agua marcado (en cm de altura) en forma de un recipiente de una botella plástica de soda, agua que sale a la derecha desde un pequeño orificio de radio de 9/64 ” y un recipiente receptor para el agua que sale del cilindro.

Fuente 3:

Nombre: 13Over64Inch Small Hole

URL: `https://www.youtube.com/watch?v=gsNdsuQ1ZCo`

y `https://www.youtube.com/watch?v=SCNqxFe3eIs`

También disponible en `https://www.simiode.org/resources/488/video?resid=2085`.

Fuente 4:

Nombre: 9Over64 Inch Small Hole

URL: `https://www.youtube.com/watch?v=gsNdsuQ1ZCo`

y `https://www.youtube.com/watch?v=6cUuNUjlaPI`

También disponible en `https://www.simiode.org/resources/488/video?resid=2083`.

Fuente 5:

Nombre: 11Over64Inch Small Hole

URL: `https://www.youtube.com/watch?v=76diQ1eW8i4`

y `https://www.youtube.com/watch?v=NBr4DOj4OTE`

También disponible en `https://www.simiode.org/resources/488/video?resid=2087`.

Fuente 6:

Nombre: 7Over64 Inch Small Hole
URL: `https://www.youtube.com/watch?v=k7TSAqRfHgg`
y `https://www.youtube.com/watch?v=xDyDSPydN_E` .
También disponible en `https://www.simiode.org/resources/488/video?resid=2084`.

(13) y (14) Usando uno de los videos de la Fuente 1 o la Fuente 2 y luego uno de los videos de las Fuentes 3-6, recopila datos sobre el tiempo y la altura de la columna de agua y modela, primero con la Regla de la Potencia y luego, si es posible, con la ecuación diferencial de la Ley de Torricelli . Estima todos los parámetros posibles y confirma tu modelo con los datos que has recopilado.

Observaciones iniciales y finales: Te Metes con el Sr. En el medio

(15) Se perfora un pequeño orificio de radio $s = 0{,}138906$ cm en el costado de un recipiente cilíndrico circular recto de radio $r = 4{,}16986$ cm y la altura del nivel del agua (por encima del orificio) va desde 12.5 cm en un tiempo de cronómetro de 1: 40.419 min a 3 cm en un tiempo de cronómetro de 2: 34.116 min. Usa dos modelos diferentes para estimar la altura en tiempos intermedios. Estos modelos son (1) modelo lineal: $h'(t) = -kh(t)$, $h(0) = 12{,}5$ con $h(143{,}286) = 2{,}0$ y (2) Ley de Torricelli: $Ah'(t) = -\alpha \cdot a \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)}$, $h(0) = 12{,}5$ con $h(143{,}286) = 2{,}0$. Aquí A es el área de la sección transversal del cilindro y a es el área del pequeño orificio para drenado, mientras que α es el coeficiente de descarga o contracción.

Después de que hayas completado tus análisis, ve al video, titulado 11Over64 Inch Small Hole de este escenario - 1-15-Torricelli, y compara tus observaciones del video con cada una de tu modelo. ¿Qué modelo es el mejor? ¿Por qué?

Ofrecemos una tabla (Tabla 4) de tiempos de reloj, tiempos relativos y observaciones conocidas. Completa el resto con los resultados de tu actividad de modelado.

Referencias

[1] University of Alicante. 2013. *Experienceas de Física. Demostraciones y Prácticas de Laboratorio*. `http://www.dfists.ua.es/experiencias_de_fisica/index1.html`. Also available as *Ley de Torricelli Vaciado de un depósito* at `http://www.youtube.com/watch?v=6LOgdOfFAbI`. Accessed 30 March 2013.

[2] Farmer, T. and F. Gass. 1992. Physical Demonstrations in the Calculus Classroom. *The College Mathematics Journal*. 23(2): 146-148.

[3] Krieder, D., D. Lahr, and S. Diesel. 2005. *Principles of Calculus Modeling: An Interactive approach*. From the Quiz in Unit on Torricelli's Law. `http://www.math.dartmouth.edu/ klbooksite/2.18/218quiz/218quiz_p02.htm`. Accessed 2 April 2013.

Hora del Reloj t (min)	Tiempo Relativo t (s)	Lineal h (cm)	Torricelli h (cm)	Observado h (cm)
1:40.419 = 100.419	0	12.5	12.5	12.5
1:45.598 = 105.598	5.179			
1:47.568 = 107.788	7.369			
1:49.623 = 109.523	9.104			
1:50.985 = 110.985	10.566			
1:56.388 = 116,388	15.969			
2:02.057 = 122.057	21.638			
2:08.032 = 128.032	27.613			
2:16.386 = 136.386	35.967			
2:25.568 = 145.568	45.149			
2:34.116 = 154.286	53.867			2.0

Tabla 4. Hora del reloj y hora relativa para la ejecución de la ley Torricelli de muestra.

[4] Masooraahs. 2011. Numec project Sem1 2L011 THE Masooraahs! `http://www.youtube.com/watch?v=44fZdi7QC8E`. Accessed 31 March 2013. Video length 7:23.

[5] Masooraahs. 2011a. Numerical methods extended video. `http://www.youtube.com/watch?v=-HsVq3KJIGA`. Accessed 31 March 2013. Video length 9:58.